1

1

Over getallen gesproken

Een wiskundige ontdekkingsreis

3[de], herziene druk

2

6
1
9

Talking about numbers

A mathematical voyage of discovery

3[rd], revised edition

3

Van Haren Publishing

Prof. Dr. Ir. Maarten Looijen

Over getallen gesproken

Een wiskundige ontdekkingsreis

3de, herziene druk

Talking about numbers

A mathematical voyage of discovery

3rd, revised edition

Andere uitgaven bij Van Haren Publishing

Van Haren Publishing (VHP) is gespecialiseerd in uitgaven over Best Practices, methodes en standaarden op het gebied van de volgende domeinen:

- IT en IT-management;
- Enterprise-architectuur;
- Projectmanagement, en
- Businessmanagement.

Deze uitgaven zijn beschikbaar in meerdere talen en maken deel uit van toonaangevende series, zoals *Best Practice, The Open Group series, Project management* en *PM series.*

Van Haren Publishing is tevens de uitgever voor toonaangevende instellingen en bedrijven, onder andere: Agile Consortium, ASL BiSL Foundation, CA, Centre Henri Tudor, Gaming Works, IACCM, IAOP, IPMA-NL, ITSqc, NAF, KNVI, PMI-NL, PON, The Open Group, The SOX Institute.

Onderwerpen per domein zijn:

IT and IT Management

ABC of ICT
ASL®
CATS CM®
CMMI®
COBIT®
e-CF
ISM
ISO/IEC 20000
ISO/IEC 27001/27002
ISPL
IT4IT®
IT-CMF™
IT Service CMM
ITIL®
MOF
MSF
SABSA
SAF
SIAM™
TRIM
VersiSM™

Enterprise Architecture

ArchiMate®
BIAN
GEA®
Novius Architectuur Methode
TOGAF®

Business Management

BABOK® Guide
BiSL® and BiSL® Next
BRMBOK™
BTF
EFQM
eSCM
FSM
IACCM
ISA-95
ISO 9000/9001
OPBOK
SixSigma
SOX
SqEME®

Project Management

A4-Projectmanagement
DSDM/Atern
ICB / NCB
ISO 21500
MINCE®
M_o_R®
MSP®
P3O®
PMBOK® Guide
Praxis®
PRINCE2®

Voor een compleet overzicht van alle uitgaven, ga naar onze website: www.vanharen.net

Over getallen gesproken

Een wiskundige ontdekkingsreis

3de, herziene druk

Talking about numbers

A mathematical voyage of discovery

3rd, revised edition

Prof. Dr. Ir. Maarten Looijen

Colofon

Titel/Title :	Over getallen gesproken / Talking about numbers
Ondertitel/Subtitle :	Een wiskundige ontdekkingsreis / A mathematical voyage of discovery
Auteur/Author :	Prof. Dr. Ir. Maarten Looijen
Uitgever/Publisher :	Van Haren Publishing, 's-Hertogenbosch, www.vanharen.net
Vormgeving/Design:	Mitsgaders Den Haag, Nederland / Mitsgaders The Hague, The Netherlands
ISBN :	Hard copy: 978 94 018 0028 0 eBoek: 978 94 018 0601 5
Druk/Edition :	3de, herziene druk / 3rd revised edition, December 2018 2de, herziene druk / 2nd revised edition, December 2016 1e druk / First edition, December 2015
Copyright :	© Van Haren Publishing, 2018

Neem voor vragen omtrent de inhoud contact op met de auteur Maarten Looijen via m.looijen@tudelft.nl

Inhoudsopgave

Voor index 'De getallen in alfabetische volgorde' zie pagina 632.

Contents

1.

Deel I

Deel I omvat de hoofdstukken 1 en 2 en beantwoordt vragen met betrekking tot het wat, het waarom en het hoe van de ontdekkingsreis.

Hoofdstuk 1 is een verantwoording en stelt nadrukkelijk dat de inhoud van het boek een vertegenwoordiging is van vele wiskundigen die hun ontdekkingen en uitwerkingen hebben gepubliceerd om anderen daarvan kennis te doen nemen.

Hoofstuk 2 omvat, in logische volgorde, zeven vragen met aansluitende antwoorden om het waarom en het hoe van de ontdekkingsreis tot uitdrukking te brengen, namelijk:
- Waar gaat het over?
- Wat is getaltheorie?
- Hoe verliep de ontdekkingsreis?
- Wat te presenteren?
- Hoe te presenteren?
- Vanwaar mijn belangstelling voor getaltheorie?
- Voor wie bestemd?

Na het laatste antwoord is er een *Met dank aan*.

1

Part I

Part I includes the chapters 1 and 2 and answers questions concerning the objective of the voyage of discovery and the way it happened.

Chapter 1 is a justification and emphatically states that the contents of the book represents many mathematicians who published their discoveries and results to inform people all over the world.

Chapter 2 presents, in logical sequence, seven questions and matching answers concerning why this book was written and how the voyage of discovery progressed. These questions are as follows:

- What is the topic of this book?
- What is number theory?
- What kind of voyage of discovery was undertaken?
- What to present?
- How to present?
- Where does my interest in number theory came from?
- Addressed to whom?

After the last answer follows *Thanks to*.

1. Verantwoording

De inhoud van dit boek is een weergave van het werk van vele wiskundigen en geïnteresseerden in getaltheorie. In de loop van de jaren is de getaltheorie in tal van boeken en artikelen wereldkundig gemaakt. Met de komst van het internet hebben de getallen ook op websites een plaats gekregen. Zodoende is een grote spreiding ontstaan van de getallen, hun omschrijvingen en hun toepassingen.
Voor mij was het een persoonlijke uitdaging om een redelijk overzicht te maken en inzicht te geven vanuit die enorme gevarieerde spreiding van getallen. Daarbij heb ik uiteraard zelf keuzes gemaakt en voorbeelden toegevoegd ter verheldering, maar ik ben steeds uitgegaan van het werk van anderen. Het is wellicht overbodig om op te merken dat dit gepaard is gegaan met veel zoektijd en het maken van keuzes wat wel en wat niet te presenteren. Persoonlijke interesse stond voorop, gevolgd door mijn grote waardering voor het werk van vele wiskundigen.
De realiteit in beschouwing nemend merk ik dat het foutloos weergeven van de vele resultaten van de wiskundige ontdekkingsreis een illusie is. Toch concludeer ik dat de voorkomende fouten geen onoverkomelijke barrière vormen om van het resultaat met plezier kennis te nemen en zo mogelijk ook te bestuderen.

Ik wens u een plezierige en verrassende ontdekkingsreis.

Maarten Looijen

1. Justification

The contents of this book is a reflection on the work of many mathematicians from all over the world and those who are interested in number theory. In the course of a great number of years number theory is done and spread over books and articles which total can hardly be overseen. The advent of the internet and other phenomena offered an unlimited warehouse for number storage in the form of websites. It was a challenge for me to create a reasonable overview of and insight in the enormous varied number spread. Personal choices were made and examples and illustrations were added if necessary, but always based on the work and results of others. It might be unnecessary to note that a huge search had to be undertaken to get the right data and to make choices about final presentations. Personal interest for number theory and a great appreciation for the founders formed the basis of this work. The reality is that faultless copying all results of the mathematical voyage of discovery is a mission impossible. Still, I conclude that the common errors are not impassable problems to take pleasure of the outcome and also to study if possible.

I wish you a most pleasant voyage of discovery.

Maarten Looijen

2. Woord vooraf

2.1 Waar gaat het over?

Gelet op de titel is deze eerste vraag niet moeilijk om met zekerheid te beantwoorden. Het gaat over getallen. Van jongs af aan leren we de getallen 1 tot en met 10 en daarna volgen er nog veel meer. Ze spelen een belangrijke rol in het spreken en in het schrijven, in de communicatie tussen mensen en in het economische leven. En waar eigenlijk niet? Iedereen heeft er mee te maken. Het zijn de natuurlijke getallen en ze vormen een oneindige verzameling. Noem een willekeurig getal, tel er 1 bij op en je hebt weer een volgend getal. Dat is gemakkelijk te begrijpen en wellicht voor nagenoeg iedereen. Ook zullen velen wel weten wat een priemgetal is. Maar dan komt een volgende vraag. 'Hoe luidt de verzameling van de irrationale getallen en kent u enkele transcendente getallen?'. Het antwoord daarop zal vaak achterwege blijven. Wordt echter het getal π genoemd dan is dat voor velen geen onbekend getal, maar dat het deel uitmaakt van de verzameling irrationale getallen is een nieuwtje. En wat te denken van de getallen e en i. Om het nog wat uitgebreider te maken wordt gevraagd of men wel eens gehoord heeft van Quaternionen, van Euler getallen, van Narcistische getallen en van Catalan getallen. In het algemeen zal hierop ontkennend worden gereageerd. En dan te bedenken dat er alleen al in dit boek 619 verzamelingen van getallen vermeld worden en ook vele bijzondere getallen. Ze hebben elk eigen kenmerken en de namen van vele internationale wiskundigen zijn er aan verbonden. Theorie en praktijk hebben ervoor gezorgd dat de totale verzameling getallen boeiend en verrassend is. Het maakt deel uit van de zogeheten getaltheorie.

2.2 Wat is getaltheorie?

Traditioneel behoort getaltheorie tot de zuivere wiskunde die de eigenschappen van de gehele getallen bestudeert. Zuivere wiskunde duidt op het studiedomein van wiskundigen die voorkeur geven aan de uitbreiding of detaillering van wiskundige inzichten en methoden. Ze plaatsen dit boven of naast de rechtstreekse toepassing van de wiskunde. Daarmee wordt geen nieuwe tak van de wiskunde bedoeld, maar een meer algemene manier om wiskunde te benaderen en te bedrijven.

Getaltheorie is onder te verdelen in verschillende gebieden, waaronder elementaire getaltheorie, meetkundige getaltheorie, numerieke getaltheorie, priemgetal theorie en Islamitische getaltheorie. Getaltheorie heeft oude papieren en voert terug naar India, Griekenland en Egypte, om slechts enkele landen te noemen. Voor heel oude papieren is te verwijzen naar de delen 7 - 9 van de Elementen van Euclides van Alexandrië (365 – 300 BC).

Rond het begin van de 19e eeuw begint de zogeheten moderne getaltheorie en de priemgetaltheorie, gevolgd door 20e eeuw ontwikkelingen. Met de komst van de computer ontwikkelt zich de toegepaste getaltheorie. Een toepasbaarheidsgebied dat daartoe behoort, is de publieke-sleutel cryptografie waar het RSA (genoemd naar Rivest, Shamir en Adleman) cryptosysteem en de elliptische kromme gebruik van maken. Een ander toepasbaarheidsgebied van de toegepaste getaltheorie betreft de Residu Getal Systemen (RGS). De systemen representeren zeer grote getallen. Door gebruik te maken van verzamelingen van kleinere getallen, zijn berekeningen efficiënter door te voeren.

Getaltheorie behoorde tot het domein van prof. dr. H.J.A. Duparc (1918 – 2002), hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft. Hij had een veelbewogen leven waarin het Jappenkamp en het werken aan de beruchte Birmaspoorweg tijdens de Tweede Wereldoorlog hem niet gespaard zijn gebleven. Weer in Nederland promoveerde hij bij prof. dr. J. G. van der Corput op het proefschrift *Diversibility Properties of Recurring Sequences*. Het betrof recurrente rijen met onder meer de eigenschap om op systematische wijze opvolgende waarden van een functie te berekenen vanuit een gegeven initiële waarde. De Fibonacci rij is een eenvoudig voorbeeld van een recurrente rij. Het onderwerp zou hem blijven boeien. Zijn grote affiniteit tot getallen en cijferreeksen, naast andere wiskundige onderwerpen, hebben hem een grote naam gegeven. Zijn colleges en het examen getaltheorie bij hem op de kamer waren voor mij een bijzondere en blijvende ervaring. Hij maakte verder 'naam' toen hij zich, vanwege ontwikkelingen rond de Tweefasenstructuur van het wetenschappelijk onderwijs in Nederland, uit protest liet ontvoeren. Dat pakte anders uit dan hij had gedacht. Nederland raakte in rep en roer toen bekend werd dat een Delftse hoogleraar ontvoerd was. Men ging er vanuit dat er sprake was van een gewelddadige ontvoering. Toen het tot hem doordrong wat er gaande was kwam hij weer tevoorschijn.

Op z'n zachtst gezegd werd die gespeelde ontvoering niet door iedereen geapprecieerd en zeker niet door het toenmalige College van Bestuur van de universiteit.

In het begin van 2014 ontstond bij mij het idee om iets van getaltheorie zichtbaar te maken. Met de nadruk op iets. Het aantal wiskundige onderzoeken en publicaties over getallen is zo groot dat het niet te overzien is. Om daarvan het één en ander toch te presenteren moest ik een ontdekkingsreis ondernemen. Deze reis had als doel om zoveel mogelijk getallen uit de getaltheorie te vinden en daarvan het een en ander zo begrijpelijk mogelijk te presenteren. Tegelijkertijd zou het een leerzame exercitie zijn, die veel tijd zou vergen maar ongetwijfeld ook boeiend zou worden.

2.3 Hoe verliep de ontdekkingsreis?

Mijn doel van de reis was om in de eerste plaats zoveel mogelijk getallen en de betekenis ervan te vinden en te begrijpen. In de tweede plaats datgene te selecteren wat mogelijk ook voor anderen interessant en nuttig zou kunnen zijn. De vraag waar de getallen zouden kunnen worden aangetroffen leidde naar drie bronnen en wel:

- het eigen geheugen;
- het papieren geheugen;
- het digitaal geheugen.

Het eigen geheugen heeft in de loop der jaren heel veel getallen, hun beschrijvingen en allerhande informatie over getallen opgeslagen en toegepast. Maar ook is weer veel daarvan vervaagd of zelfs geheel verdwenen en vervangen. Niettemin zijn bij mij veel getallen voorhanden gebleven, mede veroorzaakt door bijzondere interesse en regelmatig of zelfs veelvuldig gebruik. Bovendien is het een bron die naar de andere bronnen verwijst en dan vooral naar het papieren geheugen bestaande uit leer- en lesboeken, wetenschappelijke artikelen en bijzondere verhalen over getallen, de betekenis ervan en waar ze vandaan komen.

Veel literatuur over getallen heb ik in de loop der jaren aangeschaft en gelezen. Daaruit blijkt dat de wereld van de getallen een onbegrensd gebied is. Vele, zo niet alle wiskundigen van alle continenten, zijn er mee bezig geweest of zijn er mee bezig. Op school en in gevorderde wiskunde studies kom je vanzelfsprekend namen van wiskundigen tegen zoals Euler, Gauss, Riemann, Pascal, Pythagoras, Fermat. Ze zijn bekend om hun stellingen die tot op de dag van vandaag worden onderwezen en toegepast. Maar ze zijn ook bekend om hun bijdragen aan de wereld van de getallen. Veel minder of zelfs geheel onbekend zijn Bernoulli, Bell, Carmichael, Cunningham, Fibonacci, Mersenne, Sierpiński, Sophie Germain en nog vele anderen. Ze worden in tal van wiskundige en wetenschappelijke boeken beschreven, maar je kunt ze soms ook tegenkomen in de meer algemene literatuur. Regelmatig heb ik boeken over getallen en getaltheorie geselecteerd, aangeschaft en bestudeerd. Zo maken 78 van deze boeken deel uit van mijn wetenschappelijke bibliotheek. Ze zijn alle in hoofdstuk 11 Referenties vermeld. Enkele titels als voorproefje noem ik hier op voorhand:

- *Prime numbers, the Most Mysterious Figures in Math* van David Wells;
- *The Fabulous Fibonacci Numbers* van Posamentier en Lehman;
- *Numbers at Work* van Taschner;
- *The Man Who Loved Only Numbers* van Paul Hoffman. The Man is de beroemde Hongaarse wiskundige Paul Erdös;
- *The Book of Numbers* van John H. Conway en Richard K. Guy.

De meeste literatuur over getallen is Engelstalig. Het reizen door die bron is zo goed als onbeperkt en vaak intensief om te lezen en te zoeken. Elk boek, vermeld in hoofdstuk 11 Referenties, belicht een aantal van de 619 getallenveramelingen uit dit boek. In veel boeken is een gevarieerdheid in getallen zeer gering. Slechts enkele boeken overstijgen een gevarieerdheid van meer dan enkele tientallen getallen. De 78 boeken dekken niet alle 619 getallenverzamelingen af. Wel is te stellen dat het papieren geheugen te kwalificeren is als *de* bron bij uitstek.
Ten slotte is er de derde bron namelijk het digitale geheugen bestaande uit een zeer groot aantal gevarieerde websites.
Een aantal is in hoofdstuk 11 Referenties genoemd. Die heb ik beschouwd als prominenten te midden van honderden andere websites. Het is niet verrassend dat de inhoud van veel websites overeenkomt met of is afgeleid van eerder verschenen wiskundige publicaties.

Met de komst van de computer in het begin van de jaren vijftig van de vorige eeuw is de mogelijkheid gecreëerd om onbeperkte hoeveelheden gegevens op te slaan, te bewaren en te raadplegen. In het begin was dat nog mondjesmaat en werden de aantallen nog uitgedrukt in de grootheden megabytes (10^6) en gigabytes (10^9). Thans hebben we het over terabytes (10^{12}), petabytes (10^{15}) en zelfs over exabytes (10^{18}) en wat te denken zettabytes (10^{21}) en yottabytes (10^{24}). Het betreft een onbeperkt geheugen om digitaal getallen en alles daarover op te slaan. En dat is ook gebeurd. Dat hebben uiteraard niet de vele wiskundigen van vóór het computertijdperk gedaan die de getallen met hun eigenschappen hebben ontdekt. Zij moesten het nog doen met het papieren geheugen. Anderen hebben ervoor gezorgd dat de getallen met hun omschrijvingen digitaal zijn opgeslagen. Om in de brij aan gegevens zinvol te kunnen zoeken werden zoekmachines ontwikkeld. Ook was het nodig om een zekere ordering in de opgeslagen gegevens aan te brengen. Dat gebeurde met het plaatsen van de gegevens op websites. Om razendsnel door de digitale getallenwereld te reizen is Google *het* instrument. Tijdens mijn ontdekkingsreis zijn vele websites bezocht en geanalyseerd. Hoewel dat vele malen
sneller gaat dan het zoeken en bladeren door boeken is het niettemin, qua tijd, een behoorlijk lange reis geweest. Ook heel verrassend en zelfs verbazingwekkend dat er zoveel gegevens over getallen en daarmee de getaltheorie digitaal voorhanden zijn. Diverse gerubriceerde overzichten van getallen waren zeer welkom om de ontdekkingsreis enige richting en sturing te geven. In het bijzonder zijn te noemen:

- *Number Gossip Properties* van de Russische Tanya Khovanova en momenteeel wiskundige bij MIT USA;
- *Types of Numbers* van William Tappe, gepensioneerd USA vliegtuig ingenieur;
- Uiteraard Wikipedia.

Zij hebben de ontdekkingsreis niet alleen qua tijd verlicht, maar ook heel veel inhoud en betekenis aan een groot aantal getallen gegeven. Niettemin bleef er nog heel wat over om te ontdekken en te onderzoeken. Er was geen sprake van één overzicht dat alle getallen uit de getaltheorie presenteerde. De realiteit was er één van grote versnippering.

De ontdekkingsreis was geen eentonige reis. Ik ontdekte 619 getallenverzamelingen en enkele honderden bijzondere getallen. Bovendien was het geen eenzame reis. Zo ontmoette ik 337 wiskundigen verspreid over 38 landen. Van deze wiskundigen kwamen er 27 voor in 2 verschillende landen en zelfs 2 in 3 verschillende landen. 'Wat ervan te presenteren?' werd de volgende vraag.
Ik vond dat het ook voor niet-wiskundigen grotendeels leesbaar moest zijn, met een sterke focus op het getal en zijn relaties. Hoe boeiend ook, een inbedding in allerhande wiskundige onderwerpen met verwijzingen naar een onbegrensde hoeveelheid rapporten en publicaties was niet aan de orde. Dat zou trouwens ook een onmogelijke opgave zijn.

2.4 Wat te presenteren?

Na de ontdekkingsreis moesten de getallenverzamelingen en de bijzondere getallen gepresenteerd worden. In de eerste plaats moest het gaan om elke verzameling zo begrijpelijk mogelijk te beschrijven. Relevante formules moesten expliciet worden vermeld. Getallenvoorbeelden dienden de omschrijvingen en de toepassing van formules te illustreren.
Deze wellicht wat cryptische omschrijving is nader toe te lichten met enkele willekeurig gekozen getallenverzamelingen en bijzondere getallen.

- De verzameling Overvloedige getallen. Het betreft alle getallen waarbij de som van de delers, behalve het getal zelf, groter is dan het getal. Zo is 12 een Overvloedig getal want de som van de delers 1, 2, 3, 4 en 6 is 16 en dat is groter dan 12.
- De verzameling van de Perfecte getallen, ook wel volmaakte getallen genoemd. Het betreft de even natuurlijke getallen p als ze van de vorm $2^{p-1}(2^p - 1)$ zijn waarbij $2^p - 1$ priemgetal is. Ze eindigen op 6 of op 8 en zijn zeldzaam. De rij begint met getal 6 gevolgd door 28. Descartes merkte op dat volmaakte getallen even zeldzaam zijn als volmaakte mensen.
  Tot 2013 waren er slechts 48 Perfecte getallen bekend met als grootste $2^{57885160} \times (2^{57885161} - 1)$.
- De verzameling van de Samengestelde getallen. Het betreft alle positieve gehele getallen die minstens tweemaal deelbaar zijn door een priemgetal. Zo is 15 een Samengesteld getal, want het is deelbaar door de priemgetallen 3 en 5. Het betreft de hoofdstelling van de rekenkunde.

- De verzameling van de Complexe getallen als uitbreiding van de Reële getallen. Ze zijn opgebouwd uit twee Reële getallen a en b en de imaginaire eenheid i met als eigenschap $i^2 = -1$.
- De Moran getallen die gedeeld door de som van hun cijfers een priemgetal opleveren. Een voorbeeld is 3031, want de som van de cijfers is 7 en 3031 gedeeld door 7 is 433 en dat is een priemgetal.
- Eén van de vele bijzondere getallen is 153.
  > Het is het 17e Driehoeksgetal want $1 + 2 + 3 + \ldots 17 = 153$
  > Het beantwoordt aan de hoofdstelling van de rekenkunde: $153 = 3^2 \times 17$
  > Het is de som van $1^3 + 5^3 + 3^3$
  > Het is rijk aan faculteiten want $153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$
- Voor nog een aantal bijzondere eigenschappen van 153 zie het hoofdstuk over de Bijbelse getallen.

En ter afsluiting nog drie voorbeelden om uit te zien naar alle andere bijzondere getallen:
- 510510: het product van de eerste 7 priemgetallen: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$
- De Gulden Snede: $1/2 \cdot (1 + \sqrt{5})$
- 84: Het getal van Diophantus.

Van de voorbeelden mag niet worden afgeleid dat alle beschrijvingen van deze geringe omvang zijn. Er zijn beschrijvingen die een groot deel van een pagina vullen. Dat zijn er niet veel, maar de lezer is gewaarschuwd. Het positieve ervan is, dat het dan verzamelingen betreft die veel te vertellen hebben.

Uit de grote opsomming van de getallenverzamelingen mag niet worden geconcludeerd dat daarmee een volledig inzicht is gegeven in wat al die verzamelingen precies betekenen. Ze zijn meestal ingebed in omvangrijke wiskundige verhandelingen. De ontdekkingsreis heeft mij dat maar al te goed doen ervaren. Het valt buiten de scope van de doelstelling van deze publicatie om dat alles aan de orde te stellen. Zelfs als ik dat zou hebben willen doen dan was het onbegonnen werk geweest. Waarom deze opmerking? De reden is dat er bij een beperkt aantal getallenverzamelingen wat meer wordt vermeld dan alleen de definitie en enkele getallenvoorbeelden. Die uitbreiding is voornamelijk een gevolg van het interessante karakter van de betreffende verzameling en soms ook vanwege de gecompliceerdheid ervan, die nadere toelichting vereist.

Veel getallen hebben hun naam te danken aan de wiskundigen die ze in hun onderzoek ontdekten of een prominente plaats deden innemen. Het is vanzelfsprekend dat deze wiskundigen met naam worden genoemd, soms vergezeld gaande van enige aanvullende informatie over de persoon en soms ook van anekdotes. Het aantal beschrijvingen en ook de omvang ervan is beperkt gehouden. De vele biografieën, die direct op naam zijn te produceren, geven een schat aan allerhande gegevens waarvan de vermelding hier niet relevant is.

Na het presenteren van 619 getallenverzamelingen volgt een aantal bijzondere getallen. Het is een persoonlijke keuze. Ze spelen een frequente of een zeldzame rol in de wiskunde en in het leven van elke dag. Ze worden gevolgd door een beperkt aantal Bijbelse getallen die wiskundige eigenschappen hebben en relaties met de getallenverzamelingen. Met twee verrassende opgaven wordt de ontdekkingsreis beëindigd.

Nu duidelijk is wat er te presenteren is, ligt de vraag 'Hoe te presenteren?' voor de hand.

2.5 Hoe te presenteren?

Het *hoe* betreft allereerst de getallenverzamelingen, waarna de bijzondere getallen volgen. Elke getallenverzameling begint met vermelding van de naam in het Nederlands én in het Engels. In veel gevallen is die naam hetzelfde of nagenoeg hetzelfde. Dan volgt een omschrijving waaraan de getallen voldoen en de formule of het voorschrift die de bijbehorende getallen bepalen of waaraan ze voldoen. Voorbeelden illustreren de tekst en de toepassing van de formule. Meestal vermeldt een aantal getallen de start, dus het begin van de getallenverzameling. Veel getallenverzamelingen zijn oneindig of worden verondersteld dat te zijn. Andere zijn eindig en in een enkel geval zelfs leeg. Wel wordt dan verondersteld dat er één of meer getallen tot die verzameling behoren, maar welke tot op heden niet zijn ontdekt. De presentatievormen zijn niet alle precies hetzelfde. Dat komt dan door de aard van de getallenverzameling, de noodzaak om meer te beschrijven