

Analyse van differentiaalvergelijkingen

Analyse van differentiaalvergelijkingen

C.J. van Duijn en M.J. de Neef

© VSSD

Eerste druk 1995, tweede druk 2001-2007

Uitgegeven door de VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: **<http://www.vssd.nl/hlf/a007.htm>**

De uitgever stelt aan docenten die dit boek in cursusverband gebruiken, desgewenst de collectie digitale illustraties en/of een elektronische versie ter beschikking. Een verzoek kan ingediend worden bij hlf@vssd.nl

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Gedrukte editie: ISBN 978-90-407-1265-4

Elektronische versie: ISBN 978-90-6562-109-2

NUR 919

Trefw.: differentiaalvergelijkingen

Voorwoord

Het modelleren van verschijnselen uit de technische wetenschappen en natuurkunde komt dikwijls neer op het combineren van constitutieve- en balansvergelijkingen, en daarmee op een formulering in termen van differentiaalvergelijkingen. Afhankelijk van de aard van het probleem krijgen we te maken met (stelsels) gewone of partiële differentiaalvergelijkingen en met nevencondities in de vorm van begin- en/of randwaarden.

In deze tweede editie richten we ons op tweedejaars studenten Wiskunde en Natuurkunde in de nieuwe bachelor's structuur. De behandelde stof veronderstelt een eerstejaars calculus achtergrond en enige elementaire lineaire algebra. Voor zover abstracte begrippen aan de orde komen, is gekozen voor een vorm waarbij wiskundigen én natuurkundigen zich thuis voelen: hier en daar wordt een bewijs uitgewerkt en naar de wat abstracte literatuur verwezen zonder de begripsopbouw voor de natuurkundigen te veel te verstoren.

Natuurlijk ligt bij een inleidende cursus als deze de nadruk op elementaire en werkbare technieken die de studenten in de latere fase van hun studie nodig hebben. Daarnaast hebben we getracht ook enkele moderne ontwikkelingen te laten doorklinken. Met name het 'klassieke' standpunt dat iedere differentiaalvergelijking exact oplosbaar is in termen van een min of meer expliciete uitdrukking (de zogenaamde analytische oplossing), ondervindt concurrentie van de filosofie van het kwalitatief redeneren. Immers, dikwijls kan nuttige informatie uit een differentiaalvergelijking worden verkregen, bijvoorbeeld over stabiliteit van evenwichten, zonder de oplossing zelf te kennen. Om dit te ondersteunen behandelen we uitvoerig de fasevlakanalyse voor gewone differentiaalvergelijkingen en vergelijkingsprincipes voor partiële differentiaalvergelijkingen. Tevens worden een tweetal voorbeelden van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen behandeld, waaronder de vergelijking van Burgers.

De stof wordt in drie delen gepresenteerd. In deel I wordt vrij uitvoerig ingegaan op de theorie en toepassingen van beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen. We behandelen de existentie- en eenduidigheidsresultaten, de fasevlak- en stabiliteitsanalyse en we geven de gebruikelijke rekenregels voor eerste- en tweede-orde vergelijkingen.

In deel II behandelen we enkele belangrijke eigenwaardeproblemen uit de quantummechanica, zoals de harmonische oscillator en het waterstofatoom, en we geven een aantal speciale functies als resultaat van machtrekssubstitutie. Tevens worden functies van Green en enkele aspecten van de Sturm-Liouville-theorie behandeld.

Als laatste, in deel III, behandelen we partiële differentiaalvergelijkingen. We bespreken vergelijkingsprincipes en eenduidigheidsresultaten en geven ruim aandacht aan gelijkvormigheidsoplossingen voor diffusievergelijkingen, omdat deze een belangrijke rol spelen binnen het vakgebied der Fysische Transportverschijnselen. Natuurlijk komt ook aan de orde de methode van scheiden van variabelen met daaraan gekoppeld de Fourier-reeksen voor de diffusie-, de Laplace- en de golfvergelijking. Tevens behandelen we functies van Green voor de Laplace-vergelijking en de methode van D'Alembert voor de golfvergelijking. Ten slotte construeren we de fundamentele oplossing van de niet-lineaire poreuze-mediavergelijking en van de Burgers-vergelijking.

Oktober 2001,

C.J. van Duijn
TU Eindhoven

M.J. de Neef
TU Delft

Inhoud

I Beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen

1	Fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen	17
1.1	Inleiding	17
1.2	Voorbeelden	20
1.3	Existentie en eenduidigheid	24
1.4	Oplossingen als banen in het fasevlak	35
1.5	Enkele expliciete methoden	40
1.5.1	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)F(u) = 0$	41
1.5.2	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)$	41
1.5.3	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)u^k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 1$)	42
1.5.4	Exacte differentiaalvergelijkingen	43
1.5.5	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(t, u')$	44
1.5.6	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u, u')$	45
1.5.7	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u)$	46
2	Tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen	51
2.1	Inleiding	51
2.2	Structuur van de oplossing	53
2.3	Expliciete rekenmethoden	59
2.3.1	Reductie van de orde	59
2.3.2	Homogene vergelijking met constante coëfficiënten	61
2.3.3	Inhomogene vergelijking	62
2.3.4	Particuliere oplossingen voor bijzondere brontermen	63
2.3.5	Methode van variatie van constanten	67
2.4	Oplossingen als banen in het fasevlak	68
3	Stabiliteit van evenwichten van niet-lineaire autonome stelsels	81
3.1	Inleiding en definitie stabiliteit	81
3.2	Linearisering rond een evenwicht	83
3.3	Liapunov-functies	89

A	Existentie door middel van de expliciete Euler-methode	99
II	Eigenwaardeproblemen en bijzondere functies	
4	Eigenwaardeproblemen in de quantummechanica	109
4.1	Inleiding	109
4.2	Deeltje in oneindig diepe potentiaalput	111
4.3	Deeltje in eindig diepe potentiaalput	112
4.4	De harmonische oscillator	114
4.5	Het waterstofatoom	118
5	Methode van machtrekssubstitutie	131
5.1	Machtreksooplossing rond een normaal punt	131
5.2	De Euler-vergelijking	134
5.3	Machtreksooplossing nabij een regulier-singulier punt	135
5.4	De Bessel-vergelijking	138
6	Tweede-orde randwaardeproblemen	147
6.1	Inleiding	147
6.2	Sturm-Liouville-problemen	149
6.3	Functies van Green	154
III	Partiële Differentiaalvergelijkingen	
7	Formulering en achtergrond van de problemen	163
8	De diffusievergelijking	169
8.1	Eenduidigheid	169
8.2	Gelijkvormigheidsoplossing op $(0, \infty)$	171
8.3	Gelijkvormigheidsoplossing op $(-\infty, \infty)$	174
8.4	Algemeen beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$	175
8.5	Randwaardeprobleem op $(0, L)$	178
8.6	Fourier-reeksen met sinus- en cosinustermen	183
9	De Laplace-vergelijking	193
9.1	Eenduidigheid, fundamentele oplossing en functies van Green . . .	193
9.2	Laplace-vergelijking in een strook in \mathbb{R}^2	198
9.3	Laplace-vergelijking op een taartpunt in \mathbb{R}^2	200
10	Golfvergelijking	205
10.1	Energierelatie, eenduidigheid	205
10.2	Randwaardeprobleem op $(0, L)$	206

10.3	Beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$	209
11	Enkele niet-lineaire vergelijkingen	215
11.1	De poreuze-mediavergelijking	215
11.2	De Burgers-vergelijking	218
11.2.1	Lopende golven	218
11.2.2	Fundamentele oplossing	220
Index	235

Lijst van Figuren

1.1	Oplossingen van Voorbeeld 1.2.1 voor verschillende waarden van α .	21
1.2	Bifurcatiediagram voor de Landau-vergelijking.	22
1.3	Oplossing van Voorbeeld 1.2.3 voor $\alpha = 1$.	23
1.4	Familie van oplossingen in Voorbeeld 1.2.4 (geen eenduidigheid).	24
1.5	De slinger.	25
1.6	Banen in het fasevlak voor de slinger zonder wrijving. Voor het bepalen van de banen is gebruik gemaakt van uitdrukking (1.14)	37
1.7	Banen in het fasevlak voor de slinger met wrijving, bepaald door numerieke integratie van de differentiaalvergelijkingen met $g/l = 1$ en $k/m = 1$.	40
1.8	Uitvergroting van de situatie in een omgeving van het zadelpunt $(-\pi, 0)$.	41
2.1	Lokaties van nulpunten en extrema van u_1 en u_2 .	57
2.2	Een RLC-circuit.	63
2.3	Amplitude modulatie	67
2.4	Ontbinding van een startvector \mathbf{u}_0 in termen van \mathbf{k}_1 en \mathbf{k}_2 .	69
2.5	Faseportret van een instabiel knooppunt.	70
2.6	Faseportret van een zadelpunt.	71
2.7	Faseportretten van een stabiel knooppunt (links) en een instabiel knooppunt (rechts), voor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ met $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ lineair onafhankelijk.	72
2.8	Faseportretten van een stabiel knooppunt (links) en een instabiel knooppunt (rechts), voor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ zonder een volledig stelsel eigenvectoren.	72
2.9	Voorbeeld van een instabiel knooppunt met samenvallende eigenwaarden.	74
2.10	$\alpha = 0$, zuiver imaginaire eigenwaarden: de oorsprong is een centrum.	75
2.11	Faseportretten van een stabiel spiraal punt (links, $\alpha < 0$) en een instabiel spiraal punt (rechts, $\alpha > 0$).	75
2.12	Faseportret van vergelijking (2.28).	77

3.1	Stabiliteit.	82
3.2	Asymptotische stabiliteit.	82
3.3	Instabiliteit.	83
3.4	Geometrische interpretatie van de Stelling van Liapunov.	90
3.5	Banen in het fasevlak voor de niet-lineaire oscillator van Voorbeeld 3.3.5 met $\alpha = 1$	94
A.1	Stuksgewijs lineaire benadering van de oplossing ($n = 1$).	100
A.2	Partitie van het interval $[0, a]$	101
A.3	Voorbeeld van functie $\varphi \in C_0^1(J)$	101
4.1	Bepaling van de energieniveaus voor een deeltje in een eindig diepe potentiaalput.	113
4.2	Bolcoördinaten.	119
4.3	Even en oneven Legendre-polynomen.	122
4.4	Enkele bolfuncties, vnr: $Y_{0,0}, Y_{1,0}, Y_{1,1}, Y_{2,0}, Y_{2,1}, Y_{2,2}$	125
5.1	Twee lineair onafhankelijke machtreeksoplossingen van de vergelijking van Airy.	133
5.2	Nulde-orde en eerste-orde Bessel-functies	140
5.3	De eerste vier modi voor $t = 0$: $u_i = J_0(\mu_i r)$, $i = 1, 2, 3, 4$	144
6.1	Voorbeelden van functies met $f, f' \in C_{pw}([0, 1])$	152
7.1	Randwaarden voor vergelijking (7.8).	165
8.1	De grafieken voor $f(\eta)$ en de concentratie $C(x, t)$	173
8.2	Concentratie is constant langs parabolen in x, t -vlak.	174
8.3	Het verloop van de concentratie $C(x, t)$ op verschillende tijdstippen.	175
8.4	Het diffusiegedrag van een puls bij toenemende tijd	176
8.5	Voorbeeld van constructie van f : oneven voortzetting	187
8.6	Voorbeeld van constructie van f : even-voortzetting	187
8.7	Oneven voortzetting van $f(x)$	188
8.8	Even voortzetting van $f(x)$	189
9.1	Laplace-vergelijking op een strook.	199
9.2	Laplace-vergelijking op een taartpunt.	201
9.3	Het randwaardeprobleem in poolcoördinaten	201
10.1	Een snaar met vaste uiteinden.	207
10.2	Randwaardeprobleem voor de golfvergelijking in het (x, t) -vlak.	207
10.3	De oplossing $u(x, t)$ op de tijdstippen $t = 0, \frac{1}{2c}, \frac{1}{c}, \frac{2}{c}$	211
10.4	De beginsnelheidsverdeling $g(x)$	211
10.5	De functie $G(x)$	212

10.6	De oplossing $u(x, t)$ op de tijdstippen $t = \frac{1}{2c}$ en $t = \frac{2}{c}$	212
11.1	Gelijkvormigheidsprofiel (11.15) voor $1 < m < 2$ (links), $m = 2$ (midden) en $m > 2$ (rechts).	217
11.2	Fundamentele oplossing met fronten.	218
11.3	Lokatie van de schok in de limietoplossing u^0	220
11.4	De gelijkvormigheidsoplossing ϕ	222
11.5	De fundamentele oplossing op enkele achtereenvolgende tijdstip- pen.	222
11.6	Lokatie van de schok in de limietoplossing u^0	223

Deel I

Beginwaardeproblemen voor
gewone
differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 1

Fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen

1.1 Inleiding

Veel problemen uit de natuurkunde worden beschreven door differentiaalvergelijkingen, waarin de onbekende(n) en afgeleide daarvan voorkomen als functie van maar één onafhankelijke variabele (bijvoorbeeld de tijd of een plaatscoördinaat). We spreken in zo'n geval van *gewone* differentiaalvergelijkingen. Verder spreken we van een k^e -orde (≥ 1) vergelijking als de orde van hoogst voorkomende afgeleide k is.

Dikwijls kunnen vergelijkingen van orde ≥ 2 geschreven worden als een stelsel eerste-orde vergelijkingen. We illustreren dit voor $k = 2$ aan de hand van de lineaire differentiaalvergelijking

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0.$$

Hierin geven de accenten differentiatie naar t aan en zijn p, q bekende coëfficiënten. Stellen we $u_1 = u$ en $u_2 = u'$, dan ontstaat het stelsel

$$\begin{aligned}u_1' &= u_2, \\u_2' &= -qu_1 - pu_2,\end{aligned}$$

ofwel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & u_2 \\ -qu_1 - pu_2 & \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

met

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}.$$

Dus zonder onszelf erg te beperken kunnen we ons richten op (stelsels) eerste-orde gewone differentiaalvergelijkingen. In dit hoofdstuk beschouwen we beginwaardeproblemen voor zulke stelsels. De wiskundige formulering van zo'n probleem luidt:

Zoek een differentieerbare vectorfunctie (of gladde kromme)

$$\mathbf{u} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)), n \geq 1)$$

zodat

$$(BWP) \begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) & \forall t \in I, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & t_0 \in I. \end{cases} \quad (1.1)$$

Hierin is het rechterlid van (1.1) een afbeelding

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die aan ieder punt $(\mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ het punt (de vector) $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n$ toevoegt. Verder is de vector $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ de startvector of de beginwaarde voor Probleem (BWP).

De bedoeling is dus om de onbekende functie $\mathbf{u}(t)$ te vinden die aan de differentiaalvergelijking (1.1) voldoet en die op het tijdstip $t = t_0$ samenvalt met de gegeven vector \mathbf{u}_0 . Deze oplossing van Probleem (BWP) beschrijft een baan in de Euclidische ruimte \mathbb{R}^n ($n \geq 1$). Door vergelijkingen van het type (1.1) wordt op ieder tijdstip de snelheid $d\mathbf{u}/dt$ bepaald door de positie $\mathbf{u}(t)$ en door de tijd t .

We noemen de differentiaalvergelijking (1.1) *autonoom* als de functie \mathbf{F} niet expliciet van t afhangt, m.a.w. als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

In fysische modellen komt dit vaak voor. De differentiaalvergelijking is *lineair* als \mathbf{F} een lineaire functie is in de variabelen u_1, \dots, u_n , d.w.z. \mathbf{F} is van de vorm:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{b}(t),$$

waarin $A(t)$ een $n \times n$ -matrix is.

Bij het bestuderen van Probleem (BWP) onderscheiden we globaal de volgende werkwijzen:

- (i) Het zoeken naar expliciete oplossingen in gesloten vorm. Dit is alleen mogelijk in bijzondere gevallen, waarvan wij er enkele zullen bespreken. Dit levert dus $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ als formule op.
- (ii) Kwalitatief redeneren, d.w.z. belangrijke karakteristieken van de oplossing geven zonder deze expliciet te kennen. Hier zullen we flink wat aandacht aan besteden.

- (iii) Gebruik van numerieke oplosmethoden. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is de expliciete Euler-methode, waarbij het Probleem (BWP) voor $t \geq t_0$ als volgt wordt gediscrèteiseerd:

$$(E) \begin{cases} \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{u}^k, t^k), & k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

Hierin is \mathbf{u}^k een benadering van $\mathbf{u}(t^k)$ met $t^k = t_0 + k\Delta t$. Met behulp van $\{\mathbf{u}^k\}_{k=0}^\infty$ kan vervolgens een stuksgewijs lineaire benadering worden geconstrueerd. In Aanhangsel A komen we hierop terug, met name ten aanzien van de convergentie van de benaderde oplossing naar de oplossing \mathbf{u} als $\Delta t \rightarrow 0$.

In dit hoofdstuk ligt de nadruk op fundamentele vragen ten aanzien van existentie en eenduidigheid van oplossingen en continue afhankelijkheid van beginwaarden.

In het deel van de theorie dat wordt aangeduid met het woord existentie, bewijzen we dat Probleem (BWP) een oplossing heeft in een geschikt gekozen interval rond het startpunt $t = t_0$, zonder deze oplossing zelf te kennen. In het bewijs wordt het bestaan van een oplossing aangetoond door de limiet te beschouwen van approximaties. Deze kunnen op verschillende wijzen worden gekozen. We geven hiervan twee voorbeelden: in paragraaf 1.3 gebruiken we Picard-iteratie en in Aanhangsel A de stuksgewijs lineaire approximatie afkomstig van Probleem (E).

Met eenduidigheid (uniciteit) van een oplossing bedoelen we dat er ten hoogste één kromme $\mathbf{u}(t)$ kan zijn die voldoet aan de twee eisen van Probleem (BWP), namelijk: $\mathbf{u}(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking (1.1) en gaat op tijdstip $t = t_0$ door het punt \mathbf{u}_0 .

Opmerking 1.1.1. We zullen vaak gebruik maken van de volgende notatie:

- $C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \{F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ continu op } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\};$
- Voor een willekeurig interval $J \subseteq \mathbb{R}$:
 $C(J; \mathbb{R}^n) = \{\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^n : u_i \text{ continu op } J \text{ voor } 1 \leq i \leq n\};$
- $C(\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ continu op } \mathbb{R}\}.$
- $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ voor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (Euclidische norm ten opzichte van de standaard basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ met $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$).

□

1.2 Voorbeelden

In het scalaire geval ($n = 1$) noemen we vergelijking (1.1) *separabel* als

$$F(u, t) = F_1(u)F_2(t).$$

Hiermee is dus iedere autonome scalaire differentiaalvergelijking van de vorm (1.1) separabel met F_2 constant. Als voorbereiding op de theorie behandelen we hier enige voorbeelden van autonome vergelijkingen. Deze illustreren een aantal concepten die later zullen terugkomen.

Voorbeeld 1.2.1. Beschouw het beginwaardeprobleem ($n=1$)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = k u(1 - u) & \forall t \in I, \\ u(t_0) = \alpha & t_0 \in I, \end{cases} \quad (1.2)$$

waarin k een positieve constante is en $-\infty < \alpha < \infty$.

Vergelijking (1.2) is autonoom en dus separabel, met $F_1(u) = u(1 - u)$ en $F_2(t) = k$. We delen vervolgens (1.2) door $F_1(u)$ en integreren het resultaat. Dan ontstaat

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{F_1(u(s))} u'(s) ds = \int_{t_0}^t F_2(s) ds$$

ofwel

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{F_1(u)} du = \int_{t_0}^t F_2(s) ds.$$

We noemen dit de methode van scheiden van variabelen. Substitutie van F_1 en F_2 in de laatste uitdrukking resulteert in

$$\int_{\alpha}^{u(t)} \frac{ds}{s(1-s)} = \int_0^t k ds = kt \quad (t_0 = 0).$$

Uitwerking hiervan geeft

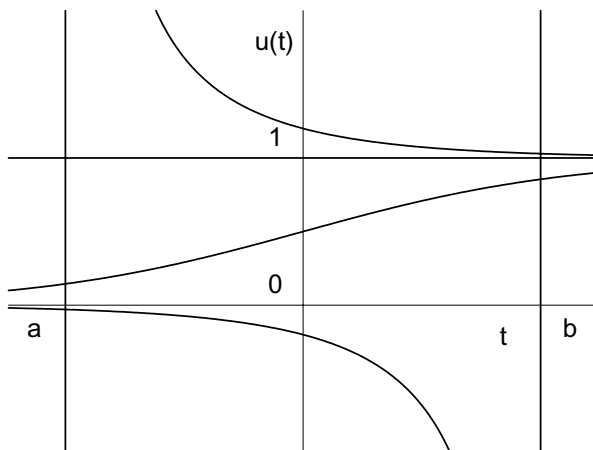
$$u(t) = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{\alpha} e^{-kt} + 1}. \quad (1.3)$$

Deze oplossing wordt gegeven in figuur 1.1. Het maximale interval waarop de oplossing bestaat noemen we het existentie-interval. Dit voorbeeld toont aan dat dit existentie-interval niet altijd gelijk is aan de gehele reële rechte, maar ook een deelinterval kan zijn. Omdat dit in het algemeen zal afhangen van de beginwaarde α wordt het hier aangegeven met I_α . Voor dit voorbeeld vinden we de volgende intervallen:

$$\alpha > 1 : \quad I_\alpha = (a, \infty), \quad \lim_{t \downarrow a} u(t) = \infty \text{ en } u(\infty) = 1,$$

$$\alpha \in (0, 1) : \quad I_\alpha = \mathbb{R}, \quad u(-\infty) = 0, \text{ en } u(+\infty) = 1,$$

$$\alpha < 0 : \quad I_\alpha = (-\infty, b), \quad u(-\infty) = 0, \text{ en } \lim_{t \uparrow b} u(t) = -\infty,$$



Figuur 1.1: Oplossingen van Voorbeeld 1.2.1 voor verschillende waarden van α .

waarin $a = -\frac{1}{k} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}$ voor $\alpha > 1$ en $b = -\frac{1}{k} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}$ voor $\alpha < 0$. Merk op dat $a < 0$ en $b > 0$. I_α bevat dus het tijdstip $t = 0$ voor alle α . De constante functies $u = 0$ en $u = 1$ zijn evenwichtoplossingen: $u = 0$ is *instabiel* en $u = 1$ is *stabiel*. Hiermee bedoelen we dat voor iedere willekeurig kleine verstoring van de beginconditie $u_0 = 0$, dus voor iedere α met $|\alpha| \ll 1$ en $\alpha \neq 0$, de corresponderende oplossing bij toenemende t van $u = 0$ zal weggroeien. Daarentegen zal voor iedere niet te grote verstoring van de conditie $u_0 = 1$, in het bijzonder voor iedere $\alpha > 0$, de corresponderende oplossing bij toenemende t naar $u = 1$ convergeren. Deze observaties volgen rechtstreeks uit de oplossingsformule (1.3).

Het is ook mogelijk, en vaak zelfs wenselijk, de stabiliteit van evenwichten direct met behulp van de vergelijking vast te stellen, dus zonder de tijdsafhankelijke oplossing zelf te kennen. We dienen dan het rechterlid van de differentiaalvergelijking, in dit geval de functie $F(u) = ku(1-u)$, te lineariseren rond de evenwichten $u_e \in \{0, 1\}$. We schrijven daartoe $u = u_e + v$, $|v| \ll 1$, en beschouwen voor de verstoring v de vergelijking

$$\frac{dv}{dt} = F(u_e + v) \approx F'(u_e)v.$$

Als nu $F'(u_e) < 0$, dan is de absolute waarde van de verstoring een exponentieel dalende functie in t , hetgeen duidt op een stabiel evenwicht. Als echter $F'(u_e) > 0$, dan is de absolute waarde van de verstoring een exponentieel stijgende functie in t , hetgeen duidt op een instabiel evenwicht. In dit geval hebben we

$$\begin{aligned} F'(0) = k &\Rightarrow u_e = 0 \text{ instabiel,} \\ F'(1) = -k &\Rightarrow u_e = 1 \text{ stabiel.} \end{aligned}$$

In hoofdstuk 3 wordt deze linearisatietechniek theoretisch onderbouwd en toegepast op stelsels vergelijkingen. \square

Soms bevat een differentiaalvergelijking een parameter die cruciaal is voor het aantal evenwichtoplossingen en hun stabiliteit. Als zo'n parameter een bepaalde kritische waarde passeert, dan kan het aantal evenwichten en hun stabiliteit veranderen. Zo'n parameter noemen we een *bifurcatieparameter*. Het volgende voorbeeld, afkomstig uit Boyce & DiPrima [2], behandelt zo'n situatie.

Voorbeeld 1.2.2. Beschouw de Landau-vergelijking

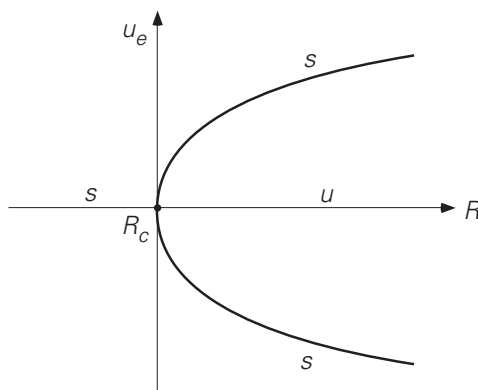
$$\frac{du}{dt} = (R - R_c)u - au^3,$$

waarin R_c en a positieve constanten zijn en R een parameter is die iedere positieve waarde kan aannemen.

We zien direct dat voor $R < R_c$, $u_e = 0$ de enige evenwichtoplossing is en omdat $F'(0) = R - R_c < 0$ is dit evenwicht stabiel. Als echter $R > R_c$ dan komen er twee nieuwe evenwichten bij, namelijk

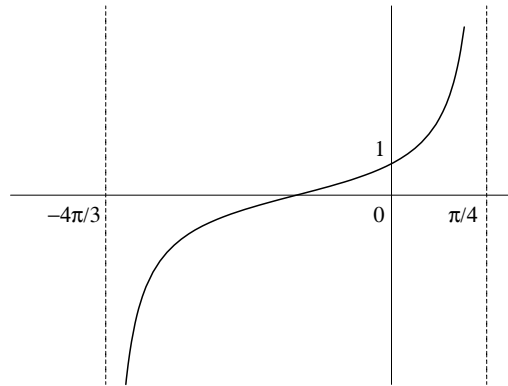
$$u_e = \pm \sqrt{\frac{(R - R_c)}{a}}.$$

Deze beide evenwichten zijn stabiel, terwijl de nuloplossing instabiel is geworden. De situatie wordt weergegeven in een zogenaamd bifurcatiediagram (figuur 1.2) \square



Figuur 1.2: Bifurcatiediagram voor de Landau-vergelijking.

In Voorbeeld 1.2.1 is het existentie interval waarop de oplossing is gedefinieerd afhankelijk van de beginconditie, maar altijd slechts naar één kant begrensd. In het volgende voorbeeld treedt een eindig existentie interval op.



Figuur 1.3: Oplossing van Voorbeeld 1.2.3 voor $\alpha = 1$.

Voorbeeld 1.2.3. Beschouw het probleem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 + u^2 & \forall t \in I, \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Scheiden van variabelen geeft

$$\int_{\alpha}^{u(t)} \frac{1}{1+s^2} ds = t$$

en dus

$$u(t) = \tan(\arctan \alpha + t).$$

Er geldt nu (zie ook figuur 1.3):

$$I_{\alpha} = \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \alpha, \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha\right)$$

en

$$\begin{aligned} u(t) &\searrow -\infty && \text{als } t \downarrow -\frac{\pi}{2} - \arctan \alpha, \\ u(t) &\nearrow +\infty && \text{als } t \uparrow \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha. \end{aligned}$$

□

Soms hebben we wel existentie maar geen eenduidigheid. Later zal blijken dat dit samenhangt met het ontbreken van de differentieerbaarheid van het rechterlid van (1.1). Ter illustratie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 1.2.4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^{1/2} & t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

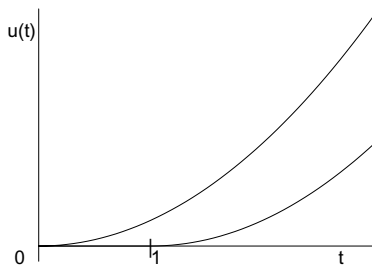
Dit probleem heeft een triviale oplossing $u \equiv 0$. Het heeft ook een niet-triviale oplossing:

$$\int_0^u \frac{1}{s^{1/2}} ds = t \Rightarrow 2u^{1/2} = t \Rightarrow u(t) = \frac{1}{4}t^2.$$

Het is zelfs mogelijk om een hele familie van oplossingen te construeren: voor iedere $c > 0$ voldoet.

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq c, \\ \frac{1}{4}(t - c)^2 & t > c. \end{cases}$$

Deze oplossingen zijn geschetst in figuur 1.4. In dit geval is er dus geen eenduidigheid voor het beginwaardeprobleem. Merk op dat het rechterlid F niet differentieerbaar is in $u = 0$: $F'(0^+) = \infty$. \square



Figuur 1.4: Familie van oplossingen in Voorbeeld 1.2.4 (geen eenduidigheid).

1.3 Existentie en eenduidigheid

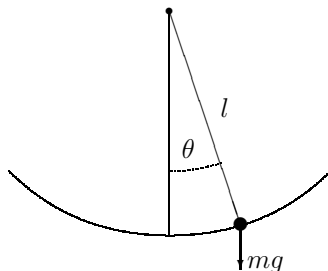
Na deze inleidende voorbeelden richten wij onze aandacht op de existentie en eenduidigheid van oplossingen van het Probleem (BWP). Hierbij volgen wij Hirsch & Smale [4]. Een alternatief existentie bewijs wordt gegeven in Aanhangsel A.

Eerst merken we op dat we zonder verlies van algemeenheid kunnen nemen

$$t_0 = 0 \text{ en } \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}.$$

Immers stel

$$\tau := t - t_0, \quad \mathbf{v}(\tau) := \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{G}(\mathbf{v}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0, \tau + t_0).$$



Figuur 1.5: De slinger.

Dan geldt dat $\mathbf{u}(t)$ een oplossing is van Probleem (BWP) dan en slechts dan als $\mathbf{v}(\tau)$ een oplossing is van

$$(\text{BWP}_0) \begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{G}(\mathbf{v}, \tau) & \forall \tau \in I_0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Hierin is I_0 het interval

$$I_0 = I - t_0 = \{\tau : \tau = t - t_0 \text{ en } t \in I\}.$$

We maken de volgende fundamentele veronderstelling met betrekking tot de continuïteit en differentieerbaarheid van de functie $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$:

$$(\text{H}) \begin{cases} \text{De functie } \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ is continu en continu differentieerbaar} \\ \text{in } \mathbf{u}, \text{ op het gehele definitiegebied: m.a.w. } F_i, \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \text{ voor} \\ 1 \leq i, j \leq n. \end{cases}$$

Voordat de betekenis van deze veronderstelling duidelijk wordt gemaakt, geven we eerst het voorbeeld van de slinger.

Voorbeeld 1.3.1 (Slinger met wrijving). Beschouw zoals in figuur 1.5 de beweging van een slinger in een vloeistof of gas, ten gevolge waarvan wrijving ontstaat die evenredig is met de snelheid. Evenwicht van krachten geeft

$$m a = F_z - F_w.$$

Dit betekent

$$m l \theta'' = -m g \sin \theta - k l \theta',$$

oftewel

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \theta'.$$

We schrijven de tweede-orde niet-lineaire differentiaalvergelijking als een eerste-orde stelsel. Laat $\theta' = \omega$ (snelheid), dan ontstaat

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega. \end{cases}$$

Stellen we $\mathbf{u} = (\theta, \omega)$ en $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (u_2, -\frac{g}{l} \sin u_1 - \frac{k}{m} u_2)$ dan geeft dit voor de functionaalmatrix:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos u_1 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix},$$

m.a.w. voor het probleem van de slinger voldoet de functie \mathbf{F} aan (H). \square

Beschouw in \mathbb{R}^n de bol B_R met straal $R > 0$,

$$B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < R\}.$$

Dan geldt het volgende.

Gevolg 1.3.2 (Consequenties van Hypothese (H)) Voor iedere $R > 0$ bestaan er constanten $M(R)$ en $L(R)$ zodat

$$(i) \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\| \leq M(R) \quad \forall \mathbf{x} \in B_R \text{ en } \forall t \in (-R, R);$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L(R) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_R \text{ en } \forall t \in (-R, R).$$

BEWIJS. De eerste ongelijkheid is een direct gevolg van de continuïteit van \mathbf{F} . De tweede ongelijkheid is een gevolg van de differentieerbaarheid van \mathbf{F} in \mathbf{u} en wordt als volgt afgeleid.

Voor ieder paar punten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_R$ geldt dat de rechte lijn die deze punten verbindt, d.w.z.

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_2 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)s \quad \text{voor } 0 \leq s \leq 1,$$

ook in B_R ligt. Voor iedere $t \in \mathbb{R}$ en $i \in \{1, \dots, n\}$ vast gekozen, geldt dat de functie

$$g(s) := F_i(\mathbf{x}(s), t), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

differentieerbaar is. Dus

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds$$

ofwel

$$F_i(\mathbf{x}_1, t) - F_i(\mathbf{x}_2, t) = \int_0^1 \nabla F_i \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) ds. \quad (1.4)$$

Omdat ∇F_i continu is in \mathbf{u} en t , bestaat er een constante $L_0(R)$ zodat

$$\|\nabla F_i(\mathbf{x}, t)\| \leq L_0(R), \quad \text{voor alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

en voor alle $\mathbf{x} \in B_R$ en $t \in (-R, R)$. Dit gebruiken we in (1.4), waaruit volgt dat

$$|F_i(\mathbf{x}_1, t) - F_i(\mathbf{x}_2, t)| \leq L_0(R) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

hetgeen ongelijkheid (ii) impliceert met $L(R) = \sqrt{n} L_0(R)$. \square

We kunnen nu de volgende stelling formuleren.

Stelling 1.3.3 *Stel dat \mathbf{F} aan (H) voldoet. Voor iedere $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ bestaat er dan een getal $a > 0$ en een unieke oplossing $\mathbf{u} : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ van Probleem (BWP).*

BEWIJS. Zoals eerder opgemerkt nemen we zonder verlies van algemeenheid $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ en $t_0 = 0$. In plaats van Probleem (BWP) beschouwen we de geïntegreerde vorm:

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}(s), s) ds. \quad (1.5)$$

Het zal duidelijk zijn dat

$$\mathbf{u}(t) \text{ oplossing van (1.5)} \iff \mathbf{u}(t) \text{ oplossing van (BWP)}.$$

De beide formuleringen zijn equivalent. We zullen het bewijs van de stelling baseren op uitdrukking (1.5). Wat we verder nodig hebben is het volgende technische lemma uit de analyse (we geven het zonder bewijs: dit kan gevonden worden in Simmons [7] of Rudin [6]).

Lemma 1.3.4 *Laat $l > 0$, $J = [-l, l]$ en beschouw de rij vectorfuncties (of krommen) $\{\mathbf{u}_k(t)\}_{k=1}^\infty$, $t \in J$, die voldoet aan*

(i) $\mathbf{u}_k \in C(J; \mathbb{R}^n)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$;

(ii) Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een $N = N(\epsilon) > 0$ zodat voor alle $i, j > N$

$$\max_{t \in J} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\| < \epsilon.$$

Dan bestaat er een $\mathbf{u} \in C(J; \mathbb{R}^n)$ zodat

$$\max_{t \in J} \|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{als } k \rightarrow \infty.$$

We zeggen dan dat de rij $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^\infty$ uniform convergeert.

Dus als we in staat zijn een rij vectorfuncties te construeren die voldoet aan (i) en (ii), dan zegt het lemma dat deze rij een limiet heeft waarnaar de rij uniform convergeert. Een gevolg hiervan is dat de limiet en integraal mogen worden verwisseld. Met andere woorden,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s) ds = \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s) ds = \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}(s), s) ds,$$

voor iedere continue functie $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{u}$, uniform als $k \rightarrow \infty$.

We benaderen de oplossing van de integraalvergelijking (1.5) door middel van *successieve approximatie* (Picard iteraties).

Laat $R > 0$. Kies vervolgens a zodat

$$0 < a < \min \left\{ \frac{R}{M(R)}, \frac{1}{L(R)}, R \right\}$$

en laat $J = [-a, a]$. We definiëren de rij krommen $\{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^\infty$ op het interval J door

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{k+1}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s) ds, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.6)$$

Stel nu dat $\|\mathbf{u}_k(t)\| < R$ voor alle $t \in J$ en zekere $k \geq 0$. Dan geldt ook

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{k+1}(t)\| &= \left\| \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s) ds \right\| \leq \int_0^t \|\mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s)\| ds \\ &\leq \int_0^a \|\mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s)\| ds \leq a M(R) < R. \end{aligned}$$

Omdat $\|\mathbf{u}_0\| = 0$, vinden we met inductie dat de hele rij $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^\infty$ in de bol B_R ligt: m.a.w.

$$\|\mathbf{u}_k(t)\| < R \quad \text{voor alle } k = 0, 1, \dots \text{ en alle } t \in J.$$

Om te bewijzen dat de rij convergeert gebruiken we Lemma 1.3.4. Laat

$$c := \max_{t \in J} \|\mathbf{u}_1(t)\|.$$

Dan geldt voor alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)\| &= \left\| \int_0^t \{\mathbf{F}(\mathbf{u}_1(s), s) - \mathbf{F}(\mathbf{0}, s)\} ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}(\mathbf{u}_1(s), s) - \mathbf{F}(\mathbf{0}, s)\| ds \\ &\leq a L(R) \max_{t \in J} \|\mathbf{u}_1(t)\| = a L(R) c. \end{aligned}$$

We gebruiken weer inductie.

Stel dat voor zekere $k \geq 2$ geldt

$$\|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}_{k-1}(t)\| \leq (aL(R))^{k-1}c \quad \text{voor alle } t \in J. \quad (1.7)$$

Dan geeft (1.6)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{u}_k(t)\| &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{k-1}(s), s)\| ds \\ &\leq \int_0^t L(R) \|\mathbf{u}_k(s) - \mathbf{u}_{k-1}(s)\| ds \\ &\leq aL(R) \max_{t \in J} \|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}_{k-1}(t)\| = (aL(R))^k c, \end{aligned}$$

en dus is (1.7) waar voor alle $k \geq 2$.

Laat nu $\alpha := aL(R)$. Merk op dat $\alpha < 1$ (t.g.v. de keuze van a). We hebben dan voor iedere $i > j > N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_j(t)\| &= \|\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_{i-1}(t) + \mathbf{u}_{i-1}(t) - \dots + \mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)\| \\ &\leq \alpha^{i-1}c + \alpha^{i-2}c + \dots + \alpha^j c \\ &= \sum_{k=j}^{i-1} \alpha^k c \leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k c = \frac{c\alpha^N}{1-\alpha} < \epsilon, \end{aligned}$$

voor N voldoende groot.

Dan volgt uit Lemma 1.3.4 dat op het interval J de rij $\{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ uniform convergeert naar een functie $\mathbf{u}(t)$. Nemen we de limiet ($k \rightarrow \infty$) in het linker- en rechterlid van

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}_k(s), s) ds, \quad t \in J,$$

dan volgt voor de limietfunctie \mathbf{u} dat

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{u}(s), s) ds, \quad t \in J,$$

m.a.w. \mathbf{u} is een oplossing van Probleem (BWP) met $\mathbf{u}_0 = 0$ en $t_0 = 0$. Dit geeft de existentie op het interval $J = [-a, a]$.

De eenduidigheid wordt als volgt aangetoond. Stel dat $\mathbf{u}(t)$ en $\mathbf{v}(t)$ oplossingen zijn van (1.5) met de eigenschap dat

$$\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \in B_R \quad \text{voor alle } t \in J.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}(\mathbf{u}(s), s) - \mathbf{F}(\mathbf{v}(s), s)\| ds \\ &\leq L(R) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\| ds. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Laat

$$Q := \max_{t \in J} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|,$$

d.w.z. Q is de maximale afstand tussen twee oplossingen. Omdat $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|$ een continue functie is, wordt het maximum aangenomen voor zekere $t^* \in J$. Ongelijkheid (1.8) geeft dan

$$Q \leq L(R) \int_0^{t^*} \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\| ds \leq \alpha Q,$$

ofwel

$$Q(1 - \alpha) \leq 0.$$

Omdat $\alpha < 1$ en $Q \geq 0$ geeft dit $Q = 0$, m.a.w.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) \quad \text{voor alle } t \in J.$$

□

Voorbeeld 1.3.5. Beschouw de lineaire afbeelding

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = A(t) \mathbf{u},$$

waarin $A(t)$ een $n \times n$ -matrix waarvan de elementen a_{ij} continue functies op \mathbb{R} zijn; m.a.w. $a_{ij} \in C(\mathbb{R})$ voor $1 \leq i, j \leq n$. Dan voldoet \mathbf{F} aan Hypothese (H) en heeft het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t) \mathbf{u} & \forall t \in I, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, & t_0 \in I, \end{cases}$$

een oplossing in een zekere omgeving van het punt t_0 . In hoofdstuk 2 laten we zien dat het existentie-interval voor lineaire vergelijkingen met continue coëfficiënten de hele \mathbb{R} is. Dus in bovenstaand stelsel geldt $I = \mathbb{R}$. Als A een constante matrix is (onafhankelijk van t), dan geeft de Picard iteratie de benaderingen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(t) &= \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{u}_1(t) &= (I + At) \mathbf{u}_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) &= \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 \right) \mathbf{u}_0, \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_n(t) &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} t^k \right) \mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

Volgens het bewijs van Stelling 1.3.3 convergeert deze rij naar een limiet $\mathbf{u}(t)$. Deze limiet noteren we als

$$\mathbf{u}(t) = e^{At} \mathbf{u}_0, \quad \text{met} \quad e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

□

Hieronder volgen enkele belangrijke consequenties van Stelling 1.3.3.

Gevolg 1.3.6 *Bij autonome differentiaalvergelijkingen, waarvan het rechterlid voldoet aan (H), snijden oplossingen elkaar niet.*

BEWIJS. Laat $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ open intervallen zijn. Stel dat $\mathbf{u} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{v} : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ oplossingen zijn van vergelijking (1.1) en dat geldt

$$\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) \quad \text{voor zekere } t_1 \in I_1 \text{ en } t_2 \in I_2.$$

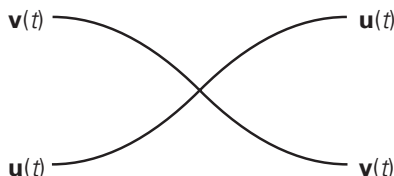
Laat nu

$$\mathbf{w}(t) := \mathbf{v}(t_2 - t_1 + t).$$

Dan hebben we de situatie waarin \mathbf{u} en \mathbf{w} beide oplossingen zijn van (1.1), beide gedefinieerd in een omgeving van t_1 , die voldoen aan $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{w}(t_1)$. Wegens de eenduidigheid van het beginwaardeprobleem geldt dan dat

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t) \quad \text{in omgeving van } t_1.$$

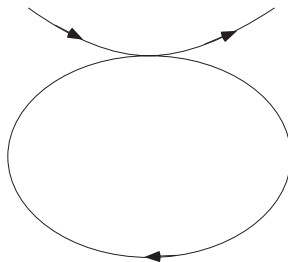
Dus een situatie in \mathbb{R}^n zoals geschetst in de figuur hieronder kan niet optreden.



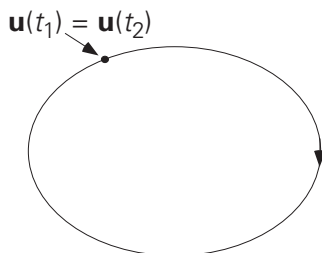
□

Gevolg 1.3.7 Laat $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (definitiegebied \mathbb{R}) een niet-constante oplossing zijn van de vergelijking (1.1), waarin het rechterlid voldoet aan (H). Als geldt dat $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_2)$ voor $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dan is $\mathbf{u}(t)$ periodiek met periode $|t_1 - t_2|$.

BEWIJS. Gebruik makend van Gevolg 1.3.6 kan worden aangetoond dat de onderstaande situatie niet kan optreden.



Wel kunnen gesloten krommen, als representatie van periodieke oplossingen, voorkomen.



(Geometrische interpretatie van de oplossing)

□

Gevolg 1.3.8 (Maximaal tijdsinterval van oplossing) Laat $\mathbf{u}(t)$ de oplossing zijn van

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t), \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

en laat (a^-, a^+) het maximale interval zijn waarop deze oplossing bestaat. Als $a^+ < \infty$ dan geldt

$$\lim_{t \uparrow a^+} \|\mathbf{u}(t)\| = \infty \quad (\text{Opblazen van de oplossing}).$$

Als $a^- > -\infty$ dan geldt eveneens

$$\lim_{t \downarrow a^-} \|\mathbf{u}(t)\| = \infty.$$

BEWIJS. We bekijken alleen het geval $a^+ < \infty$. Om een tegenspraak te creëren veronderstellen we

$$\lim_{t \uparrow a^+} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty. \quad (1.9)$$

Beschouw vervolgens vergelijking (1.1) met startvector $\mathbf{u}(a^+)$, hetgeen goed gedefinieerd is volgens (1.9). Volgens Stelling 1.3.3 weten we dat er een $\epsilon > 0$ is zodat de oplossing bestaat op het interval $[a^+ - \epsilon, a^+ + \epsilon]$, m.a.w. a^+ is niet de maximale bovengrens. Dit levert de gewenste tegenspraak op. \square

Opmerking 1.3.9. We hebben dus aangetoond dat Probleem (BWP), met \mathbf{F} volgens (H), voor iedere $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ een oplossing heeft op een maximaal existentie-interval $I = (a^-, a^+)$. Dit interval zal afhangen van de waarde van de startvector \mathbf{u}_0 . We schrijven daarom dikwijls $I = I(\mathbf{u}_0)$. Als $-\infty < a^- < a^+ < \infty$ dan blaast de oplossing op aan de randen van het interval. \square

Vervolgens beschouwen we de continue afhankelijkheid van de oplossing ten opzichte van de startvector (begin data), m.a.w. *het goed gesteld zijn* van Probleem (BWP) (Engels: well-posedness). We zullen laten zien dat twee oplossingen van dezelfde differentiaalvergelijking, maar met verschillende startvectoren, nooit meer dan exponentieel met de tijd uit elkaar kunnen groeien.

Stelling 1.3.10 (Continue afhankelijkheid van beginwaarden) *Stel er bestaat een $L > 0$ zodat $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ voldoet aan*

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{v}, t)\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad (1.10)$$

voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ en $t \in \mathbb{R}$. Laat $\mathbf{u}, \mathbf{v} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ oplossingen zijn van vergelijking (1.1) die voldoen aan $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ en $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Dan geldt

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq e^{Lt} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| \quad \forall t \in J.$$

Voor het bewijs hebben we een belangrijke ongelijkheid nodig die wordt gegeven in het Lemma van Gronwall.

Lemma 1.3.11 (Gronwall) *Zij gegeven $\alpha > 0$ en $u : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en niet-negatief. Als er constanten $C, L > 0$ bestaan zodat*

$$0 \leq u(t) \leq C + \int_0^t Lu(s) ds \quad \forall t \in [0, \alpha],$$

dan geldt

$$0 \leq u(t) \leq C e^{Lt} \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

BEWIJS. Definieer $U : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$U(t) = C + \int_0^t Lu(s) ds.$$

Dan geldt

$$u(t) \leq U(t) \quad \text{en} \quad U'(t) = Lu(t) \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

Dus

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Lu(t)}{U(t)} \leq L \quad \forall t \in [0, \alpha],$$

waaruit door integratie volgt

$$U(t) \leq U(0)e^{Lt} \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

Omdat $U(0) = C$ en $u(t) \leq U(t)$, levert dit de gevraagde ongelijkheid. \square

BEWIJS VAN STELLING 1.3.10. Voor de oplossing $\mathbf{u}(t)$ en $\mathbf{v}(t)$ schrijven we

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0 + \int_0^t \{\mathbf{F}(\mathbf{u}(s), s) - \mathbf{F}(\mathbf{v}(s), s)\} ds.$$

Met de driehoeksongelijkheid geeft dit

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| + \int_0^t \|\mathbf{F}(\mathbf{u}(s), s) - \mathbf{F}(\mathbf{v}(s), s)\| ds.$$

Hierin gebruiken we de ongelijkheid (1.10). Dan ontstaat

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| + \int_0^t L \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\| ds.$$

Toepassing van het Lemma van Gronwall geeft dan het gewenste resultaat. \square

Opmerking 1.3.12. Laat $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ voldoen aan (1.10) en laat $\mathbf{F}(\mathbf{u}_e) = \mathbf{0}$ voor een zekere $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^n$. Deze constante vector is dan een evenwichtoplossing van vergelijking (1.1). Volgens Stelling 1.3.10 hebben we, voor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_e$,

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_e\| \leq e^{Lt} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_e\|, \quad t \in J,$$

hetgeen impliceert dat $\|\mathbf{u}(t)\|$ begrensd is op J . Volgens Gevolg 1.3.8 betekent dit dat $a^+ = \infty$ en $a^- = -\infty$, met andere woorden, dat we onder deze aannamen op \mathbf{F} globale existentie van een oplossing hebben (existentie-interval is \mathbb{R}). \square

De aanname $\mathbf{F}(\mathbf{u}_e) = \mathbf{0}$ maakt het aantonen van globale existentie triviaal. Het is echter niet nodig dit te veronderstellen, zie ook opgave 10 van dit hoofdstuk.

1.4 Oplossingen als banen in het fasevlak

De oplossing

$$\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

van Probleem (BWP) beschrijft een baan in de \mathbb{R}^n , de n -dimensionale faseruimte. Als $n = 2$ spreken we van het fasevlak. Dus corresponderend met iedere startvector \mathbf{u}_0 is een baan in de faseruimte en vanwege Gevolg 1.3.6 kunnen bij autonome vergelijkingen de verschillende banen elkaar niet snijden. We gebruiken deze informatie om oplossingen van differentiaalvergelijkingen in kwalitatieve zin te onderzoeken. Om de analyse (relatief) eenvoudig te houden beperken we ons hier tot autonome vergelijkingen en $n = 2$. Voorbeelden van fasevlak analyse kunnen worden gevonden in Boyce & DiPrima [2] of in Peletier [5], waarbij de laatste vooral de moeite waard is voor meer wiskundig georiënteerde studenten.

Bij het tekenen van oplossingen als banen in het fasevlak speelt, naast het niet kunnen snijden van de banen, het tekenschema van het rechterlid van de vergelijking een belangrijke rol. Als

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= F_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= F_2(u_1, u_2), \end{aligned}$$

dan beweegt de baan naar rechts (links) in het u_1 - u_2 -vlak als $F_1 > 0$ (< 0) en naar boven (beneden) als $F_2 > 0$ (< 0). Voorts spelen de krommen gedefinieerd door $F_1 = 0$ en $F_2 = 0$, de zogenaamde *isoclinen*, een belangrijke rol, omdat zij een scheiding aanbrengen tussen de verschillende gebieden in het fasevlak. We zullen het een en ander illustreren door Voorbeeld 1.3.1 weer op te pakken en verder uit te werken.

Voorbeeld 1.4.1. We beschouwen opnieuw de slinger en in het bijzonder het corresponderende beginwaardeprobleem

$$(S) \begin{cases} \theta'' + \frac{k}{m}\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 & \forall t \in I, \\ \theta(0) = \theta_0, & 0 \in I, \\ \theta'(0) = \theta'_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

We laten eerst zien dat dit probleem een globale oplossing heeft ($I = \mathbb{R}$). We grijpen hier terug naar Voorbeeld 1.3.1 waarin vergelijking 1.11 werd omgeschreven naar een eerste-orde stelsel met als vectorfunctie

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{g}{l}\sin u_1 - \frac{k}{m}u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Omdat deze functie aan (H) voldoet heeft Probleem (S) een unieke oplossing in een zekere omgeving van $t = 0$ (lokale oplossing). Omdat

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_2 - v_2 \\ -\frac{g}{l}(\sin u_1 - \sin v_1) - \frac{k}{m}(u_2 - v_2) \end{pmatrix}$$

geldt er

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{v})\|^2 = (u_2 - v_2)^2 + \left(-\frac{g}{l}(\sin u_1 - \sin v_1) - \frac{k}{m}(u_2 - v_2) \right)^2.$$

Gebruik makend van de ongelijkheid

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \quad a, b \in \mathbb{R},$$

en van de middelwaardstelling toegepast op de sinus-functie

$$\begin{aligned} |\sin u_1 - \sin v_1| &= |(u_1 - v_1) \cos \xi| && \text{voor } \xi \text{ tussen } u_1 \text{ en } v_1, \\ &\leq |u_1 - v_1|, \end{aligned}$$

ontstaat er

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{v})\|^2 &\leq \left(1 + \frac{2k^2}{m^2}\right)(u_2 - v_2)^2 + \frac{2g^2}{l^2}(\sin u_1 - \sin v_1)^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{2k^2}{m^2}\right)(u_2 - v_2)^2 + \frac{2g^2}{l^2}(u_1 - v_1)^2 \\ &\leq L^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

waarin

$$L^2 = \max \left\{ \left(1 + \frac{2k^2}{m^2}\right), \frac{2g^2}{l^2} \right\}.$$

Dus de functie \mathbf{F} voldoet aan de ongelijkheid genoemd in Stelling 1.3.10. Kies nu $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. Omdat

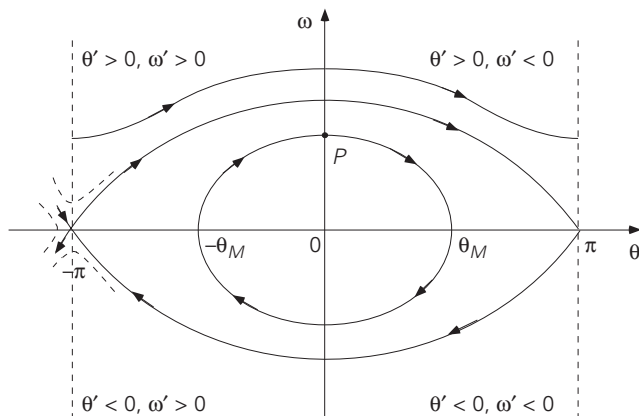
$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

geldt er volgens Stelling 1.3.10 voor $\mathbf{u}(t)$ dat

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq \|\mathbf{u}_0\| e^{Lt} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dus de oplossing is goed gedefinieerd voor ieder $t \in \mathbb{R}$, m.a.w. het beginwaardeprobleem (S) heeft een globale oplossing.

Hoe zien de banen $\mathbf{u}(t)$ eruit in het fasevlak? We onderscheiden de situatie zonder wrijving en die met wrijving.



Figuur 1.6: Banen in het fasevlak voor de slinger zonder wrijving. Voor het bepalen van de banen is gebruik gemaakt van uitdrukking (1.14)

Zonder wrijving ($k = 0$).

Dan ontstaat het stelsel

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -\frac{g}{l} \sin \theta, \end{cases}$$

het tekenschema van θ en ω is aangegeven in figuur 1.6. De isoclinen zijn hier de lijnen $\{\omega = 0\}$ en $\{\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Door de vergelijkingen op elkaar te delen zien we dat langs de oplossingskrommen geldt

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{l} \frac{\sin \theta}{\omega}, \quad (1.13)$$

en geïntegreerd

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (1.14)$$

Deze vergelijkingen gebruiken we om de situatie in het fasevlak te schetsen.

De *evenwichts-* of *kritieke punten* zijn:

$$\{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

In hoofdstuk 3 beschrijven we hoe kan worden vastgesteld of zij stabiel/instabiel. Om de banen nabij de evenwichten te kunnen schetsen gebruiken we de gelijneariseerde vergelijkingen. Dit wordt uitgelegd in paragraaf 2.4. In het daar ontwikkelde jargon heten de punten $(\pm\pi, 0)$ *zadelpunten* en de oorsprong $(0, 0)$ een *centrum punt*.

De *separatrix*, dat wil zeggen de kromme die de zadelpunten verbindt, wordt gegeven door

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}(\cos \theta + 1).$$

De *energie* van de slinger wordt gegeven door

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m(l\theta')^2 + lmg(1 - \cos \theta),$$

ofwel

$$\frac{2E}{ml^2} = \omega^2 + \frac{2g}{l}(1 - \cos \theta).$$

Dus de separatrix correspondeert met een energie van $E = 2mgl$. De periodieke banen binnen de separatrix hebben $E < 2mgl$, de banen daarbuiten $E > 2mgl$.

We kunnen ook iets zeggen over de periode van de periodieke oplossingen. De baan die op tijdstip $t = 0$ start in punt P heeft als begincondities $\theta(0) = \theta_0 = 0$, $\omega(0) = \omega_0$ en voldoet volgens (1.14) aan

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos \theta - 1). \quad (1.15)$$

Na een kwart periode ($t = T/4$) geldt er

$$0 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos \theta_M - 1),$$

waarin θ_M de maximale uitwijkingshoek is. Eliminatie van ω_0 uit (1.15) geeft

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_M)},$$

hetgeen impliceert dat

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_M}} = t, \quad 0 < t < \frac{T}{4},$$

en dus ook dat

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_M}} = \frac{T}{4}. \quad (1.16)$$

We gebruiken de identiteit

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \cos \theta_M = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right)$$

en introduceren de variabele $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ door middel van

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_M}{2}\right) \sin \phi.$$

Stellen we vervolgens

$$\lambda = \sin\left(\frac{\theta_M}{2}\right),$$

dan geeft substitutie hiervan in (1.16) na vereenvoudiging

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi}}. \quad (1.17)$$

Dit is een elliptische integraal van de eerste soort (zie Abramowitz & Stegun [1]). Er zijn twee interessante limieten:

$$(i) \theta_M \approx 0 \Rightarrow \lambda \ll 1 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

$$(ii) \theta_M \rightarrow \pi \Rightarrow \lambda \rightarrow 1 \Rightarrow T \rightarrow \infty.$$

Het feit dat geldt (of liever gezegd: moet gelden) $T \rightarrow \infty$ als $\theta_M \rightarrow \pi$ volgt ook uit een eenduidigheidsargument (ga dit na!).

Met wrijving ($k > 0$).

We gaan nu uit van het stelsel

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -\frac{k}{m}\omega - \frac{g}{l}\sin\theta. \end{cases}$$

Merk op dat de lokatie van de evenwichtspunten hetzelfde is als in de situatie zonder wrijving. Bij de differentiaalvergelijkingen hoort het volgende tekenschema in het fasevlak (zie ook figuur 1.7)

$$\begin{aligned} \theta' > 0 &\iff \omega > 0, \\ \omega' > 0 &\iff \omega < -\frac{mg}{kl}\sin\theta. \end{aligned}$$

Zoals reeds opgemerkt kan het gedrag van de oplossingen (banen) in de buurt van de evenwichtspunten worden onderzocht door de vergelijkingen te lineariseren.

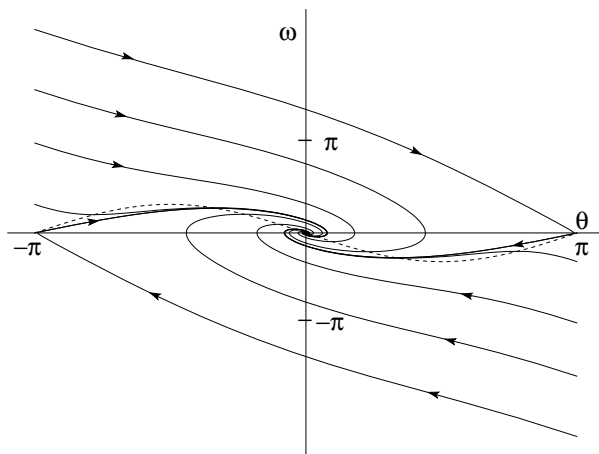
Rond $(0, 0)$ ontstaat het lineaire stelsel

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -\frac{k}{m}\omega - \frac{g}{l}\theta. \end{cases} \quad (1.18)$$

Volgens paragraaf 2.4 betekent dit dat de oorsprong een *stabiele spiraal* is, hetgeen wordt bevestigd door de banen in figuur 1.7.

Rond $(-\pi, 0)$ ontstaat het stelsel (met $\theta = -\pi + u$, $\omega = 0 + v$)

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\frac{k}{m}v + \frac{g}{l}u. \end{cases} \quad (1.19)$$



Figuur 1.7: Banen in het fasevlak voor de slinger met wrijving, bepaald door numerieke integratie van de differentiaalvergelijkingen met $g/l = 1$ en $k/m = 1$.

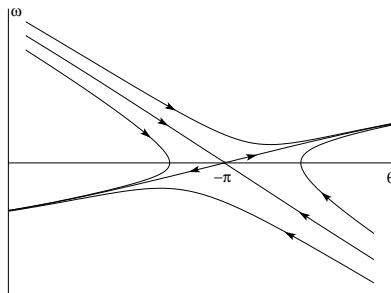
Dit betekent dat het punt $(-\pi, 0)$ een *zadelpunt* is. Dit komt overeen met het gedrag van de banen in figuur 1.8. Deze figuur laat een uitvergroting van de situatie rond het evenwichtspunt zien. De stabiliteit kan worden bepaald met de theorie uit hoofdstuk 3.

□

1.5 Enkele expliciete methoden

Wil men van een bepaalde vergelijking nagaan of er een expliciete uitdrukking voor de oplossing bekend is, dan is het raadzaam om naast het gezond verstand de literatuur te raadplegen. Er is namelijk goed encyclopedisch werk op dit gebied beschikbaar, bijvoorbeeld het zogenaamde "Handbook of Differential Equations" van Zwillinger [8] waarin tevens veel referenties naar eerdere klassieke werken voorkomen. Wij zullen ons hier beperken tot enkele veel voorkomende typen van expliciet oplosbare vergelijkingen.

We beginnen met enkele eerste-orde scalaire vergelijkingen. Afgeleiden naar t worden soms met accenten aangegeven.



Figuur 1.8: Uitvergroting van de situatie in een omgeving van het zadelpunt $(-\pi, 0)$.

1.5.1 Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)F(u) = 0$

Dit is een separabele vergelijking. Deze wordt aangepakt met de methode van scheiden van variabelen, zoals besproken in Voorbeeld 1.2.1. Het oplossen van zo'n vergelijking komt dus in feite neer op het uitrekenen van twee integralen.

1.5.2 Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)$

Dit is een lineaire vergelijking. Als $r \equiv 0$ dan spreken we een *homogene* vergelijking. Deze is separabel en de methode van scheiden van variabelen geeft als oplossing

$$u_h(t) = C \exp\left(-\int^t p(s) ds\right).$$

De constante C en de integratie grens volgen uit de beginconditie. Als $r \neq 0$, dan noemen we de vergelijking *inhomogeen*. Iedere oplossing $u(t)$ van zo'n inhomogene vergelijking kan worden geschreven als de som van een oplossing van de homogene vergelijking (u_h) en een willekeurige oplossing van de inhomogene vergelijking, de zogenaamde particuliere oplossing (u_p):

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t).$$

Zo'n particuliere oplossing wordt dikwijls bepaald als verstoring van de oplossing van de homogene vergelijking: we proberen een oplossing van de vorm

$$u_p(t) = C(t) \exp\left(-\int^t p(s) ds\right).$$

Na integratie volgt

$$u(t) = \left\{ \int^t r(\tau) \exp\left(+\int^\tau p(s) ds\right) d\tau + C \right\} \exp\left(-\int^t p(s) ds\right).$$

In paragraaf 2.3 zal deze methode ook worden behandeld voor tweede-orde vergelijkingen.

Voorbeeld 1.5.1. Los op het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u' - u = \sin t, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Volgens de theorie van paragraaf 1.3 heeft dit probleem een eenduidige oplossing in een omgeving van $t = 0$. Dus als we met de hierboven beschreven procedure een oplossing kunnen construeren, dan moet dit de enige zijn. We vinden

$$u_h(t) = Ce^t$$

en

$$u_p(t) = \left(\int^t \sin \tau e^{-\tau} d\tau \right) e^t = -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t.$$

Dus

$$u(t) = Ce^t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t.$$

Om aan de beginconditie te voldoen kiezen we $C = \frac{1}{2}$. Het definitie gebied van deze oplossing (het existentie interval) is \mathbb{R} . \square

Soms lukt om via een transformatie een vergelijking naar een expliciet oplosbaar type om te schrijven.

1.5.3 Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)u^k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 1$)

Dit is de vergelijking van Bernoulli. Voeren we de transformatie $z(t) = \{u(t)\}^{1-k}$ uit, dan ontstaat voor z de lineaire vergelijking

$$\frac{1}{1-k} \frac{dz}{dt} + p(t)z = r(t).$$

Deze lossen we op volgens de procedure van subparagraaf 1.5.2.

Voorbeeld 1.5.2. Los op het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u' + t^{-1}u = u^2, & t > 0, \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Dit probleem valt ook binnen de categorie zoals besproken in paragraaf 1.3 (zolang $t > 0$) en heeft dus een eenduidige oplossing in een omgeving van $t = 1$.

Deze vinden we via de transformatie $z(t) = 1/u(t)$, omdat $k = 2$. Voor z volgt het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} z' - t^{-1}z = -1, & t > 1, \\ z(1) = 1. \end{cases}$$

We vinden

$$z_h(t) = Ct$$

(kies direct $C = 1$ wegens beginconditie) en

$$z_p(t) = \left\{ - \int_1^t \exp\left(-\int_1^\tau \frac{1}{s} ds\right) d\tau \right\} t = -t \ln t.$$

Dus

$$z(t) = t(1 - \ln t) \text{ en } u(t) = \frac{1}{t(1 - \ln t)}.$$

Het existentie interval is hier het interval $(0, e)$. □

1.5.4 Exacte differentiaalvergelijkingen

Exacte differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen van de vorm

$$N(u, t) \frac{du}{dt} + M(u, t) = 0 \quad \text{met} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial u}.$$

In zo'n geval proberen we een functie $\Psi(u, t)$ te bepalen, zodat

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = M(u, t) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial u} = N(u, t),$$

hetgeen in principe mogelijk is vanwege de condities op M en N . De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt impliciet gedefinieerd door

$$\Psi(u(t), t) = \text{constant}.$$

De constante volgt uit de beginwaarde.

Voorbeeld 1.5.3. Los op het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} 2tuu' + 2t + u^2 = 0, & t > 0, \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

In een omgeving van $t = 1$ is er een eenduidige oplossing en we kunnen hiervoor een uitdrukking vinden omdat de vergelijking exact is, met

$$N(u, t) = 2tu \text{ en } M(u, t) = 2t + u^2.$$

Voor de functie Ψ vinden we dan

$$\Psi(u, t) = tu^2 + t^2.$$

De oplossing $u = u(t)$ moet worden bepaald uit

$$tu^2 + t^2 = 2.$$

Dit geeft

$$u(t) = +\sqrt{\frac{2-t^2}{t}},$$

met $(0, \sqrt{2}]$ als existentie interval. \square

Opmerking 1.5.4. Het loont dikwijls de moeite eerst op eigen intuïtie af te gaan alvorens handboeken met oplosrecepten te raadplegen. Zo kan de vergelijking van het laatste voorbeeld, met $w = u^2$, omschreven worden naar de lineaire vergelijking

$$t \frac{dw}{dt} + 2t + w = \frac{d}{dt}(tw) + 2t = 0.$$

De oplossing wordt gevonden door directe integratie, dus zonder enige kennis van exacte vergelijkingen. \square

Sommige tweede-orde vergelijkingen kunnen door betrekkelijk eenvoudige substituties of transformaties tot een eerste-orde vergelijking worden teruggebracht. We geven hiervan enkele voorbeelden.

1.5.5 Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(t, u')$

Dit is een vergelijking zonder u . Het corresponderende beginwaardeprobleem,

$$\begin{cases} u'' = F(t, u') & \forall t \in I, \\ u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u'_0, & t_0 \in I, \end{cases}$$

wordt als volgt opgelost. Stel $u' = v$. Dan ontstaat het eerste-orde probleem

$$\begin{cases} v' = F(t, v) & \forall t \in I, \\ v(t_0) = u'_0, & t_0 \in I, \end{cases}$$

en hieruit

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

1.5.6 Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u, u')$

Dit is een vergelijking zonder t . Om het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u'' = F(u, u') & \forall t \in I, \\ u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u'_0, & t_0 \in I, \end{cases}$$

op te lossen, gaan we als volgt te werk. Stel u is monotoon op subintervallen $I_s \subset I$. Op zo'n interval werken we met de inverse

$$\sigma = u^{-1}, \text{ d.w.z. } \sigma(u(t)) = t, \quad t \in I_s.$$

We beschouwen dan de functie

$$v(u) = u'(\sigma(u)).$$

Dan geldt

$$\frac{dv}{du} = u'' \frac{d\sigma}{du} = u'' \frac{1}{u'(\sigma(u))} = u'' \frac{1}{v}.$$

Dus

$$\begin{cases} v \frac{dv}{du} = F(u, v), \\ v(u_0) = u'_0. \end{cases}$$

Hier lossen we $v = v(u)$ uit op en integreren vervolgens om $u = u(t)$ te krijgen

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{v(u)} u' d\tau = \int_{t_0}^t d\tau \quad \Rightarrow \quad \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{v(s)} ds = t - t_0 \quad \text{voor } t, t_0 \in I_s.$$

We illustreren deze procedure aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 1.5.5. Los op het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u'' + u(u')^3 = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \end{cases}$$

Door de vergelijking te schrijven als stelsel van twee gekoppelde eerste-orde vergelijkingen, kan men eenvoudig nagaan dat de theorie van paragraaf 1.3 ook hier van toepassing is. Een uitdrukking voor de oplossing vinden we als volgt. Omdat u niet constant is in een omgeving van $t = 0$, vinden we voor v het probleem

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} + uv^2 = 0, \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

De oplossing wordt gegeven door

$$v(u) = \frac{2}{2 + u^2},$$

en dus vinden we voor $u(t)$:

$$\int_0^{u(t)} \frac{2 + s^2}{2} ds = t,$$

ofwel

$$u(t) + \frac{1}{6}u^3(t) = t.$$

Het definitiegebied van deze oplossing is \mathbb{R} . □

Indien ook u' ontbreekt in de vergelijking, dan kunnen we soms het volgende proberen.

1.5.7 Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u)$

Deze vergelijking fungeert als model van een niet-lineaire veer zonder wrijving (zie ook Voorbeeld 1.3.1 met $k = 0$). Hierin is u de uitwijking en u'' de versnelling. Om zo'n vergelijking op te lossen beschouwen we de energie van het massa-veersysteem. Daartoe vermenigvuldigen we de vergelijking met u' . Dit geeft

$$u'u'' = F(u)u',$$

ofwel

$$\frac{1}{2}(u'^2)' + (G(u))' = 0 \text{ met } G(u) = - \int_0^u F(s) ds.$$

Integratie geeft

$$\frac{1}{2}u'^2 + G(u) = E \text{ (= constant)}.$$

Dit is de energie balans: de som van kinetische energie en potentiële energie is constant. Hieruit halen we de eerste-orde separabele vergelijkingen

$$u' = \pm \sqrt{2(E - G(u))}.$$

Afhankelijk van $G(u)$ kan hieruit de oplossing $u = u(t)$ expliciet worden bepaald door $(2(E - G(u)))^{-1/2}$ te primitiveren.

Voor tweede-orde (en hogere-orde) lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten zijn veel oplostechnieken ontwikkeld. In het volgende hoofdstuk worden daarvan de belangrijkste besproken.

Opgaven

1. Beschouw de vergelijking:

$$\frac{du}{dt} = k(p - u)(q - u), \quad t > 0,$$

waarin $k > 0$ en $0 < p < q$ constanten zijn.

- Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtoplossingen.
- Bepaal de oplossing die voldoet aan $u(0) = 0$.
- Laat $p = q$. Bepaal weer de oplossing die voldoet aan $u(0) = 0$.

2. Beschouw:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = k f(u), & t \geq 0, \\ u(0) = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{waarin} \quad f(u) = \begin{cases} -u \ln |u|, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

en $k > 0$.

- Onderzoek de stabiliteit van de evenwichten.
- Bepaal de oplossing voor $\alpha > 0$.

3. Los op:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^{1/3}, & t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

4. Los op:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Bepaal het existentie-interval in relatie tot α .

5. Construeer m.b.v. de Picard iteraties een benadering van het beginwaarde probleem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a u, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \neq 0. \end{cases}$$

6. Construeer m.b.v. de Picard iteraties een benadering van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 2t(1 + u), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

7. Bepaal de Taylor-reeks voor $\sin t$ en $\cos t$ door de Picard iteraties toe te passen op het eerste-orde stelsel dat correspondeert met het tweede-orde beginvoorwaardeprobleem (harmonische oscillator)

$$\begin{cases} u'' + u = 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

8. Zij gegeven de 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bereken e^{At} .

9. Beschouw het lineaire stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

waarin $A(t)$ een matrix is met $a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continu en begrensd. Toon aan dat er voor iedere startvector \mathbf{u}_0 een globale oplossing $\mathbf{u}(t)$ bestaat (d.w.z. $\|\mathbf{u}(t)\| < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

10. Laat $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ voldoen aan (1.10). Toon aan dat Probleem (BWP) een globale oplossing heeft.

Hint: Schrijf

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{c}) + \mathbf{F}(\mathbf{c}),$$

voor een willekeurige \mathbf{c} uit het definitiegebied van \mathbf{F} . Vermenigvuldig met $\mathbf{u} - \mathbf{c}$ en gebruik achtereenvolgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, (1.10) en tenslotte de ongelijkheid $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Dit levert een differentiaalongelijkheid voor $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{c}\|^2$.

11. Beschouw het niet-lineaire beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u'' = f(u), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0. \end{cases}$$

Toon aan:

- (a) Als $f \in C^1(\mathbb{R})$, d.w.z. continu differentieerbaar, dan bestaat er een unieke lokale oplossing.
- (b) Als $f(0) = 0$ en $|f'(u)| \leq L < \infty$ voor iedere $u \in \mathbb{R}$, dan bestaat er een unieke globale oplossing.

12. Laat a en b positieve constanten zijn in het stelsel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay, \\ \frac{dy}{dt} = -bx. \end{cases}$$

Teken de banen in het eerste kwadrant van het fasevlak (het x - y vlak).

13. Laat a, b, c, d positieve constanten zijn in het stelsel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay - cxy, \\ \frac{dy}{dt} = -bx - dxy. \end{cases}$$

Teken de banen in het eerste kwadrant van het fasevlak.

14. Los op:

$$\begin{cases} t \frac{du}{dt} + u = 3t^2, & t \in \mathbb{R}, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

en bepaal het existentie-interval.

15. Los op:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u = \frac{1}{1+t^2}, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

en bepaal het existentie-interval.

16. Los op:

$$\begin{cases} t \frac{du}{dt} + 2u = \sin t, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi) = \frac{1}{\pi}, \end{cases}$$

en bepaal het existentie-interval.

17. Los op:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{u \cos t}{1+2u^2}, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

18. Los op:

$$\begin{cases} (1-t^2) \frac{du}{dt} + t(u-a) = 0, & -1 < t < 1, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

waarin a een positieve constante is.

19. Los op:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{3t^2}{3u^2 - 4}, & t \in \mathbb{R}, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

en bepaal het existentie-interval.

20. Bepaal de oplossingen van

$$\frac{du}{dt} = au - bu^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

waarin a en b positieve constanten zijn.

21. Los op:

$$\begin{cases} t \frac{du}{dt} - u = \frac{t^4}{u}, & t \in \mathbb{R}, \\ u(1) = 1, \end{cases}$$

en bepaal het existentie-interval.

22. Los op:

(a)

$$\begin{cases} u'' + t(u')^2 = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 2. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} tu'' + u' = 1, & t > 1, \\ u(1) = 0, \quad u'(1) = 2. \end{cases}$$

23. Los op:

(a)

$$\begin{cases} uu'' + (u')^2 = 0, & t > 0, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} u'' - 3u^2 = 0, & t > 0, \\ u(0) = 2, \quad u'(0) = 4. \end{cases}$$