Wiskunde de basis

Deel 2

Jaap Grasmeijer

1e druk

Noordhoff

Wiskunde de basis

Deel 2

Jaap Grasmeijer

Eerste druk

Noordhoff Groningen / Utrecht

Ontwerp omslag: Shootmedia
Omslagillustratie: Getty Images

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

0 / 21

ISBN (ebook) 978-90-01-88832-9
ISBN 978-90-01-88831-2
NUR 918

Woord vooraf

Zoals duidelijk zal zijn uit de titel is dit boek het vervolg op *Wiskunde de basis; deel 1*, dat vier jaar geleden verschenen is. Waar deel 1 de onderwerpen behandelt die in de meeste techniekopleidingen aan de orde komen, richt dit deel zich meer op de hardere techniek- en chemische opleidingen. De eerste twee hoofdstukken (Differentiaalvergelijkingen en de Laplacetransformatie) bouwen direct voort op de hoofdstukken Differentiëren en Integreren uit deel 1, waarvan de inhoud dan ook bekend wordt verondersteld. Evenals in deel 1 worden vrijwel alle formules die in deze hoofdstukken voorkomen afgeleid, maar staat de toepassing ervan centraal. Van hoofdstuk 3 Matrixrekenen is de paragraaf Vectoren al in deel 1 aan de orde gekomen. In dit hoofdstuk komen meerdere aspecten van de lineaire algebra aan de orde, waaronder meerdere numerieke methoden. Dit veelal om de rekentijd voor het bepalen van een oplossing te beperken. Ook wordt de methode van de kleinste kwadraten behandeld.

De keus voor hoofdstuk 4 Numerieke wiskunde zal mogelijk als verrassend ervaren worden. In de meeste hbo-wiskundeboeken is dit onderwerp op de achtergrond geraakt of zelfs geheel verdwenen (behalve in specifieke toepassingsgebieden zoals FEM en simulatieprogramma's). Dit terwijl juist in het computertijdperk veel aandacht besteed zou moeten worden aan deze link tussen wiskunde en ICT. Bij onderzoek in het werkveld van de hbo-ingenieurs wordt dan ook steevast gewezen op het belang van deze tak van wiskunde voor de beroepspraktijk. Er worden naast een aantal klassieke methoden ook een aantal moderne methoden behandeld die (veel) in de beroepspraktijk toegepast worden. Hierbij is gepoogd zo veel mogelijk ook de achterliggende theorie te behandelen zonder het hbo-niveau te ontstijgen.

Ook van dit boek zijn de uitwerkingen van de opgaven te vinden op de website www.wiskundedebasis.noordhoff.nl. De site is alleen toegankelijk als je het boek nieuw aangeschaft hebt.

Voor op- en aanmerkingen over aanpak of onderwerpkeuze houden de uitgever en de schrijver zich aanbevolen.

Ter afsluiting het motto van Richard Hamming (1915-1998):
'The purpose of computing is insight, not numbers!'

Castricum, voorjaar 2021
Jaap Grasmeijer

Inhoud

1 Differentiaalvergelijkingen

Na differentiëren en integreren is het oplossen van differentiaalvergelijkingen de volgende stap in het oplossen van problemen die voorkomen in modellen van de statica, mechanica, sterkteleer, elektrotechniek, systeemdynamica, meet- en regeltechniek, (moleculaire) dynamica en (chemische) thermodynamica.

1

1.1 Inleiding

In je vooropleiding of in het eerste jaar van het hbo heb je leren differentiëren en integreren. Deze twee vaardigheden heb je ook nodig in dit hoofdstuk bij het oplossen van *differentiaalvergelijkingen*. Een **differentiaal** is 'een zeer klein stukje' zoals dy, dx of dt.
Meestal is er iets bekend over de verhouding van twee differentialen, bijvoorbeeld:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

Zo'n vergelijking als deze noemen we een **differentiaalvergelijking** (DV).
Het opsporen van de oplossing(en) hiervan wordt in dit hoofdstuk behandeld.
Merk op dat links de afgeleide van y naar x staat.
Je kunt vergelijking (1) ook noteren als:

$$y' = \frac{1}{x} \qquad (2) \qquad \text{of} \qquad \dot{y} = \frac{1}{x} \qquad (3)$$

Als het handig is om de afgeleide als een breuk te zien, dan zullen we met de eerste notatie (1) werken. In de overige gevallen gebruiken we meestal notatie (2). In natuurkundeboeken kun je ook notatie (3) tegenkomen.

Orde en graad

Omdat de eerste afgeleide de hoogste afgeleide is die in vergelijking (2) voorkomt, is de DV van de 1^e **orde**. De **graad** van de DV is de macht waarin de hoogste afgeleide voorkomt, in dit geval dus ook 1.

VOORBEELD 1.1

1 $y'' + (y')^3 = x$

Deze DV is van de 2^e orde en 1^e graad, want y'' is de hoogste afgeleide en deze komt in de 1^e macht voor. De 3^e macht van y' doet er hier voor de graad dus niet toe.

2 $x \cdot (y''')^2 + y' + 5xy = \ln(x)$

3^e orde en 2^e graad, want y''' is de hoogste afgeleide en deze komt in de 2^e macht voor.

In dit boek worden alleen DV's van de 1^e graad behandeld en de orde is maximaal 2.
Een DV van de 1^e graad wordt meestal *lineair* genoemd.

Oplossing, algemeen en particulier

Een functie $y(x)$ is de **oplossing van een DV** als invullen van de functie en zijn afgeleiden in de DV leidt tot een gelijkheid. De vergelijking moet dus kloppen. Als er een oplossing is, zijn het er vrijwel altijd meerdere.
Je leert nu eerst om te controleren of een mogelijke oplossing klopt. Hoe je aan een mogelijke oplossing komt, leer je later. Net als bij integreren is oplossen het moeilijkste onderdeel. Vaak is het exact oplossen niet mogelijk of erg veel werk en zal je een oplossing numeriek moeten benaderen. Je krijgt dan geen functievoorschrift als oplossing, maar een lijst met tabelwaarden. Als je een mogelijke oplossing hebt, is het *controleren* van deze oplossing een stuk eenvoudiger; dit is een kwestie van differentiëren en invullen in de vergelijking, zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.

VOORBEELD 1.2

1 $xy - y' = (x - 1)y''$ heeft een oplossing $y = e^x$
Ga dit na door y' en y'' te bepalen en deze samen met y in te vullen in de DV.
Ga ook na dat $y = c \cdot e^x$ voor elke waarde van c voldoet.

2 $y'' = 0$ heeft algemene oplossing $y = cx + d$ met c en d als willekeurige constanten.
Ga dit na door y' en y'' te bepalen.
De DV is ook direct op te lossen:
Als $y'' = 0$ dan vind je door te integreren $y' = c$.
Nogmaals integreren levert $y = cx + d$.
Dit is de vergelijking van een willekeurige (rechte) lijn, alleen niet verticaal.

De oplossing kun je ook vinden met de volgende redenatie.
Als $y'' > 0$, dan is de grafiek bol; als $y'' < 0$, dan is de grafiek hol.
Als $y'' = 0$, dan is de grafiek niet bol en niet hol, dus is deze recht.
Vergelijking van alle (rechte) lijnen, niet verticaal: $y = cx + d$

3 $y' + y = 2t$ heeft een oplossing $y = 2t - 2$ (ga na!)
Dit noemen we een ***particuliere oplossing***.
Ga na dat alle functies van de vorm $y = 2t - 2 + c \cdot e^{-t}$ oplossing zijn.
Dit noemen we de ***algemene oplossing***.
Voor iedere waarde van c heb je een particuliere oplossing.

Een particuliere oplossing is een van de (vele) oplossingen. De verzameling van alle mogelijke oplossingen samen noemen we de algemene oplossing.

4 Een DV kan ook in de volgende vorm staan:

$$x\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x = 0$$

Hieruit kun je afleiden (ga na!):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^2}{x}$$

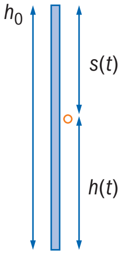
Beide vormen zul je in het vervolg tegenkomen. Je moet ze vlot en foutloos in elkaar om kunnen zetten.

Opstellen DV

Het opstellen van de DV die bij een bepaalde situatie hoort, is niet altijd eenvoudig.
We bekijken een paar voorbeelden.

VOORBEELD 1.3

FIGUUR 1.1 Valversnelling



1 Een voorbeeld uit de dynamica. Vanaf een toren wordt een steen losgelaten.
We kennen de valversnelling $g(t) = 9{,}81$ m/s^2. Bepaal de functie $h(t)$, die de hoogte aangeeft waarop de steen zich bevindt. De wrijving wordt in dit model verwaarloosd.

De hoogte waarop de steen zich bevindt op tijdstip t is gelijk aan

$$h(t) = h_0 - s(t) \tag{4}$$

waarin h_0 de beginhoogte is en $s(t)$ de afgelegde weg van de steen.
We weten verder $s'(t) = v(t)$ en $v'(t) = g(t) = 9{,}81$
Dus $s''(t) = 9{,}81$ is de 2^{e} orde DV die opgelost moet worden.
Het oplossen van de DV is in dit geval niet zo heel ingewikkeld.
We hebben als beginvoorwaarden: $v(0) = 0$ en $s(0) = 0$.
Door te integreren krijg je eerst

$s'(t) = 9{,}81t + c_1$ en vervolgens

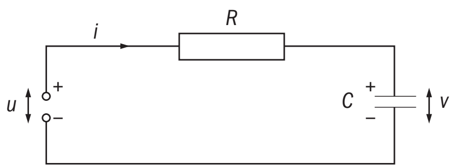
$$s(t) = \frac{9{,}81}{2}\,t^2 + c_1 t + c_2$$

Uit de beginvoorwaarden volgt voor de integratieconstanten $c_1 = c_2 = 0$.

Invullen in (4) levert dan $h(t) = h_0 - \frac{9{,}81}{2}\,t^2$ m

2 Een voorbeeld uit de elektrotechniek: de *RC*-kring (zie figuur 1.2).

FIGUUR 1.2 *RC*-kring



Een spanningsbron u is in serie geschakeld met een weerstand R en een condensator C.
Door inschakeling van de spanningsbron gaat er een stroom lopen via de weerstand naar de condensator, waar een spanningsverschil v optreedt.
We gaan de DV opstellen die het verband tussen u en v aangeeft.

Bij de weerstand treedt een spanningsverlies u_R op, bij de condensator is dit $u_C = v$.
Voor de capaciteit C van een condensator geldt per definitie:

$C = \frac{Q}{v}$, dus $Q = C \cdot v$

Omdat $i = \frac{dQ}{dt}$ en C constant is, volgt hieruit $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$

en daarmee $u_R = i \cdot R = RC \cdot \frac{dv}{dt}$

Ten slotte $u = u_R + u_C = RC \cdot \frac{dv}{dt} + v$

Hiermee hebben we de volgende DV gevonden voor de stroomkring:

$$RC \cdot \frac{dv}{dt} + v = u$$

In paragraaf 1.3 leer je hoe je deze DV kunt oplossen.

OPGAVEN

1.1 Geef de orde en de graad van de volgende DV's.
a $y''' + (y')^2 = x^4 y$ **b** $(y'')^3 + 5y' = t$

1.2 Gegeven de DV: $y' + y = 2$
a Laat zien dat $y = 2$ een (particuliere) oplossing is van deze DV.
b Laat zien dat elke functie van de vorm $y = 2 + c \cdot e^{-t}$ oplossing is van deze DV.

1.3 Gegeven de DV: $y'' + 4y = 0$
a Laat zien dat $y = \sin(2x)$ een (particuliere) oplossing is van deze DV.
b Laat zien dat elke functie van de vorm $y = A \cdot \sin(2x)$ oplossing is van deze DV.
c Laat zien dat ook elke functie van de vorm $y = B \cdot \cos(2x)$ oplossing is.

1

d Laat zien dat elke functie van de vorm $y = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$ oplossing is.

1.4 Gegeven de DV: $y'' - y' = 2y$.
a Laat zien dat $y = 3e^{2t}$ een oplossing is van deze DV.
b Laat zien dat elke functie van de vorm $y = A \cdot e^{2t}$ oplossing is.

1.5 Voor een warm voorwerp dat afkoelt in een ruime omgeving geldt de *afkoelingswet van Newton*:

'de snelheid waarmee het voorwerp afkoelt is op ieder moment recht evenredig met het verschil in temperatuur tussen voorwerp en omgeving.'

Hierbij wordt ervan uitgegaan dat de omgeving niet van temperatuur verandert door het afkoelende voorwerp.

Geef de DV die bij dit proces hoort.

1.2 Scheiden van variabelen

In de vorige pararaaf heb je gezien wat een differentiaalvergelijking is en hoe je een differentiaalvergelijking opstelt.
Nu gaan we een begin maken met het oplossen van differentiaalvergelijkingen.
Of een specifieke differentiaalvergelijking opgelost kan worden en zo ja hoe, hangt sterk af van zijn vorm.
Een van de eenvoudigste methoden is het **scheiden van variabelen**, maar dat is lang niet altijd mogelijk.

VOORBEELD 1.4

1 $y' + 3y = 0$
Als je voor y' schrijft $\frac{dy}{dx}$, dan volgt

$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

Om in een volgende stap te kunnen integreren, moet dx weg uit de noemer.
Links en rechts $*$ dx levert:

$dy + 3y * dx = 0$ en dus $dy = -3y * dx$

Wat nu nog niet bevalt, is de y bij de dx.
Delen door y geeft:

$\frac{1}{y}dy = -3 * dx$

De variabelen zijn nu gescheiden en links en rechts kun je integreren.

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -3dx \Rightarrow \ln|y| = -3x + c$

Dit kun je nog herschrijven tot: $|y| = e^{-3x+c}$

En ten slotte:

$y = \pm e^c * e^{-3x} = a * e^{-3x}$

In deze laatste uitdrukking is $a = \pm e^c$ een willekeurig getal, positief of negatief of nul.
In de berekening mag y niet nul zijn vanwege de y in de noemer en e^c kan ook niet nul zijn. Maar $y = 0$ voldoet wel aan de DV, dus daarom mag a ook nul zijn.

2 $y' + 3y = x$

Dit voorbeeld lijkt op het eerste gezicht sterk op het voorgaande, maar toch zal blijken dat de variabelen nu niet te scheiden zijn.

Als je voor y' weer schrijft $\frac{dy}{dx}$, dan volgt

$\frac{dy}{dx} + 3y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x - 3y$

Links en rechts $*$ dx levert: $dy = (x - 3y) * dx$

Als je nu deelt door y, krijg je rechts $\left(\frac{x}{y} - 3\right) * dx$.

Je bent de y rechts dus nog niet kwijt; de variabelen zijn niet te scheiden.
Dit is – helaas – bij de meeste DV's het geval.
Hoe je de DV dan wel op kunt lossen, komt in de volgende paragrafen aan de orde.

3 $y' = 3 + 2xy$

$\frac{dy}{dx} = 3 + 2xy \Rightarrow dy = (3 + 2xy) * dx$

Ook hier zijn de variabelen niet te scheiden. Als je deelt door y, komt de y terug bij 3 in de noemer. Je komt er niet vanaf.

Randvoorwaarde(n)
Als je een DV opgelost hebt en er is ook een punt van de oplossing gegeven, we noemen dit een **randvoorwaarde**, dan kun je de particuliere oplossing geven die gevraagd wordt.
Als je in voorbeeld 1 hierboven weet dat punt (1, 5) deel uitmaakt van de oplossing, dan kun je a berekenen.
Door invullen van $x = 1$ en $y = 5$ weet je dan namelijk dat $5 = a * e^{-3}$, dus $a = 5 * e^3$
De (particuliere) oplossing wordt hiermee: $y = 5e^3 * e^{-3x} = 5 * e^{3(1-x)}$

Bij voorbeeld 1 uit de vorige paragraaf zou de beginhoogte h_0 gegeven kunnen zijn.
Ook als de hoogte op een ander tijdstip gegeven is, dan is h_0 te berekenen.
Zo krijg je bij gegeven hoogte 32,0m na 2,0s de vergelijking

$32{,}0 = h_0 - \frac{9{,}81}{2} * 2{,}0^2$

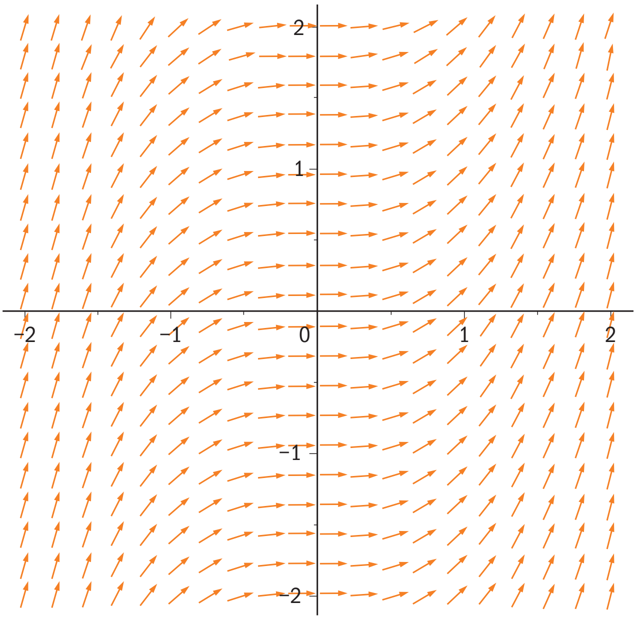
Waaruit volgt dat $h_0 = 32{,}0 + 2 * 9{,}81 = 51{,}6\text{m}$
In het bijzonder is de hoogte van de toren te berekenen, als je weet wanneer de steen beneden is.

Als dit na 4,2s het geval is, dan $0 = h_0 - \frac{9{,}81}{2} * 4{,}2^2 \Rightarrow h_0 = \frac{9{,}81}{2} * 4{,}2^2 = 86{,}5\text{m}$

Richtingsveld en oplossingskromme
Als je bij een eerste orde DV de afgeleide y' vrij kunt maken, dan kun je door x en y in te vullen in ieder punt van het vlak de richting van de oplossing bepalen. Als je de richting aangeeft door in elk punt van het vlak een pijltje (**lijnelement**) te tekenen, dan noem je het vlak met al die pijltjes het **lijnelementenveld** of het **richtingsveld** dat bij de DV hoort.
Als je in ieder punt de richting van het pijltje volgt, dan loop je over een **oplossingskromme**.
De vergelijking hiervan is een particuliere oplossing van de DV.
Welke kromme je moet hebben, hangt af van de randvoorwaarde die gegeven is.

VOORBEELD 1.5
1 Het richtingsveld dat hoort bij de DV: $y' = x^2$ zie je in figuur 1.3.

FIGUUR 1.3 Richtingsveld bij de DV $y' = x^2$



Hoe kun je dat beredeneren?
Merk allereerst op dat het niet uitmaakt welke waarde y heeft, de helling van de oplossingskromme is voor dezelfde waarde van x overal hetzelfde; in punten die recht onder elkaar liggen is de helling dus gelijk.

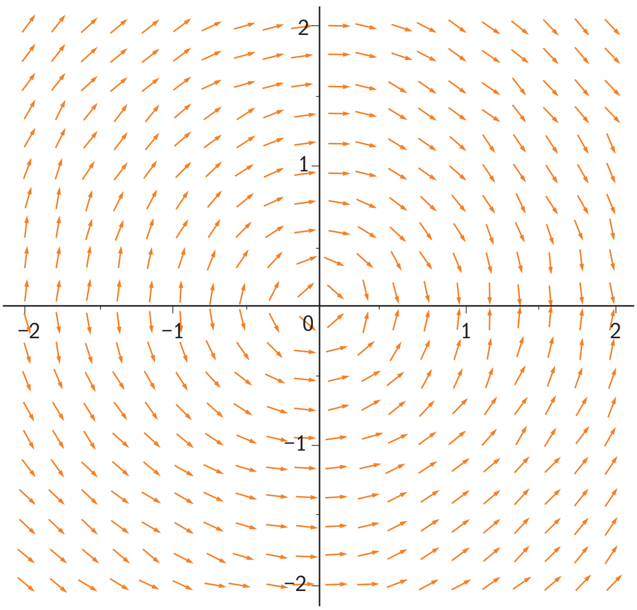
Bij toenemende (absolute) waarden voor x wordt de grafiek steiler; of je plus of min invult maakt niet uit. De grafiek loopt horizontaal als $x = 0$, dus daar waar de grafiek de y-as snijdt. In alle andere punten stijgt de grafiek.

Deze DV is eenvoudig op te lossen door te integreren.
Als $y' = x^2$, dan is $y = \frac{1}{3}x^3 + c$.

Dit zijn allemaal krommen onder elkaar die afhankelijk van de integratieconstante c over zekere afstand naar boven of naar beneden zijn geschoven. Als $c = 0$, dan gaat de grafiek door de oorsprong. Is één punt van de grafiek bekend – bijvoorbeeld via een randvoorwaarde – dan kan de waarde van c berekend worden. Dat deze DV eenvoudig op te lossen is, komt mede doordat alleen variabele x in de DV voorkomt. Daardoor liggen ook alle oplossingskrommen – die allemaal dezelfde vorm hebben – onder elkaar.

2 De DV $y' = -\frac{x}{y}$ heeft een richtingsveld van concentrische cirkels rond de oorsprong (zie figuur 1.4).

FIGUUR 1.4 Richtingsveld bij de DV $y' = -xy$



Als $x = y$ volgt $y' = -1$; dit geldt voor de punten op de lijn $y = x$.
Net zo is $y' = 1$ op de lijn $y = -x$.
Als $x = 0$ lopen de lijnelementen horizontaal en als $y \approx 0$ juist (bijna) verticaal.

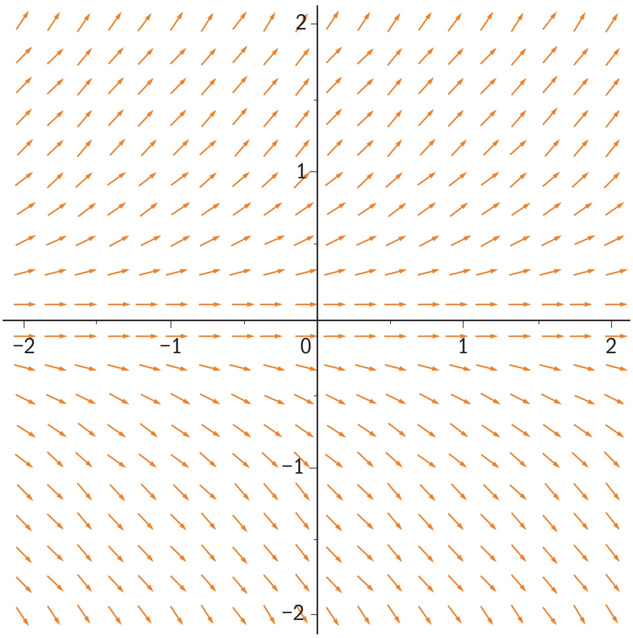
Je kunt het in dit geval ook per kwadrant bekijken:
als $x > 0$ en $y > 0$ – dus in het eerste kwadrant – geldt dat $y' = -\frac{x}{y} < 0$.
Daarom gaan alle pijltjes in dit kwadrant naar beneden.
Ga zelf na hoe het in de overige kwadranten zit.

Deze DV is op te lossen door de variabelen te scheiden.
Na eerst $y' = -\frac{x}{y}$ te schrijven als $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ en verder $y\,dy = -x\,dx$, volgt door links en rechts te integreren:

$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$ oftewel $y^2 + x^2 = 2c$ met $c > 0$; dit zijn cirkels rond de oorsprong met straal $r = \sqrt{2c}$.

3 De DV: $y' = y$ levert boven de x-as – waar $y > 0$ – een positieve uitkomst voor y' en onder de x-as een negatieve, onafhankelijk van x. Als je van links naar rechts gaat, blijven de pijltjes dus even steil.

FIGUUR 1.5 Richtingsveld bij de DV $y' = y$



De DV is op te lossen door het scheiden van de variabelen.

Schrijf $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = dx$ en door links en rechts te integreren volgt:

$\ln|y| = x + c \Rightarrow |y| = e^{x+c} = a \cdot e^x$ met $a = e^c > 0$
Dit betekent na wegwerken van de absoluutstrepen: $y = a \cdot e^x$ met $a > 0$ als $y > 0$ en $y = a \cdot e^x$ met $a < 0$ als $y < 0$.

OPGAVEN

1.6 Los de volgende DV's op – als dat mogelijk is – door het scheiden van variabelen.

a $\frac{dy}{dx} = y^2$ **c** $y dx + x dy = 0$ **e** $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$

b $\frac{dy}{dx} = xy$ **d** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ **f** $\frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{x}$

1.7 Gegeven de algemene oplossing $y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t)$ met randvoorwaarden $y(0) = 3$ en $y(\frac{1}{2}\pi) = -2$.
Bereken A en B.

1.8 Gegeven de algemene oplossing $y(t) = A \cdot \sin(\pi t) + B \cdot \cos(\pi t)$.

a Bereken A en B bij randvoorwaarden $y(\frac{1}{4}) = 3$ en $y(\frac{3}{4}) = 1$.

b Bereken A en B bij randvoorwaarden $y(\frac{1}{3}) = 2$ en $y'(-\frac{2}{3}) = 3\pi$.

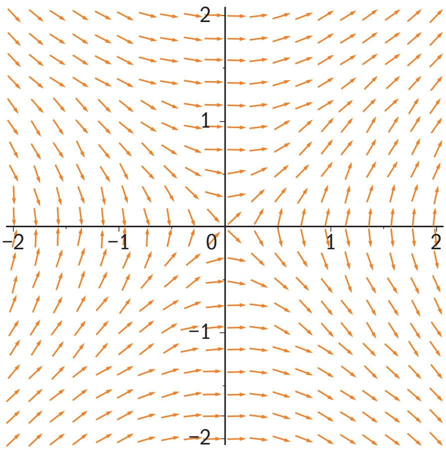
1.9 Teken het richtingsveld dat hoort bij de volgende DV's.
Neem $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 2$

a $y' = x$ **b** $y' = xy$ **c** $y' = -\frac{y}{x}$

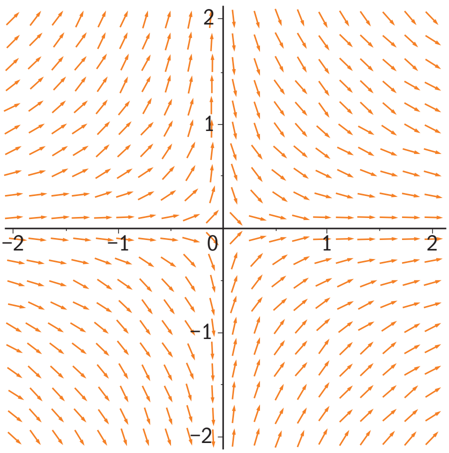
1.10 Koppel onderstaande DV's aan de getekende richtingsvelden.

DV1: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ DV2: $\frac{dy}{dx} = x + 1$ DV3: $\frac{dy}{dx} = xy$ DV4: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

FIGUUR 1.6 Richtingsveld A

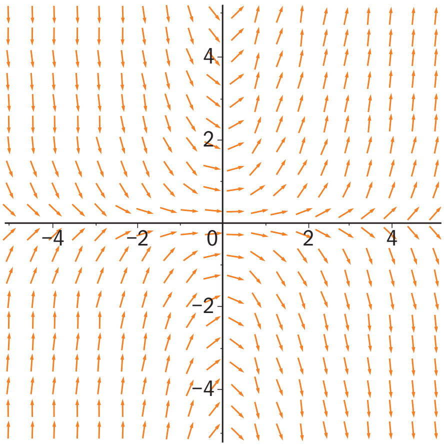


FIGUUR 1.7 Richtingsveld B

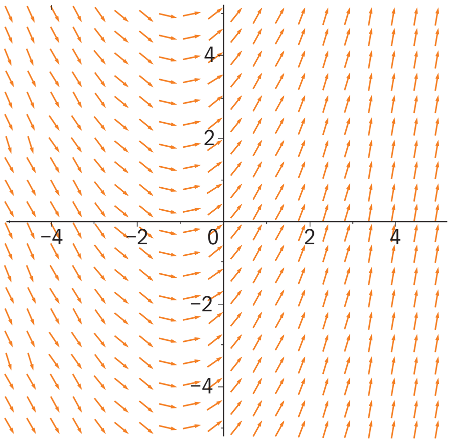


1

FIGUUR 1.8 Richtingsveld C



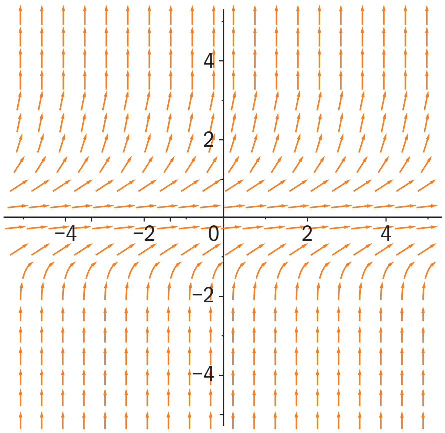
FIGUUR 1.9 Richtingsveld D



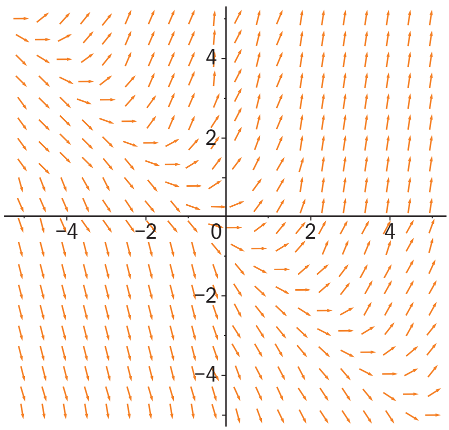
1.11 Koppel onderstaande DV's aan de getekende richtingsvelden.

DV1: $\frac{dy}{dx} = x + y$ DV2: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ DV3: $\frac{dy}{dx} = x^2y$ DV4: $\frac{dy}{dx} = y^2$

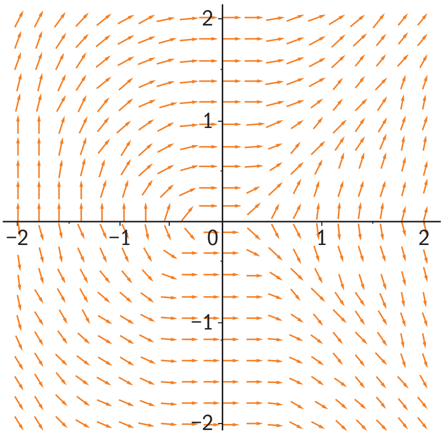
FIGUUR 1.10



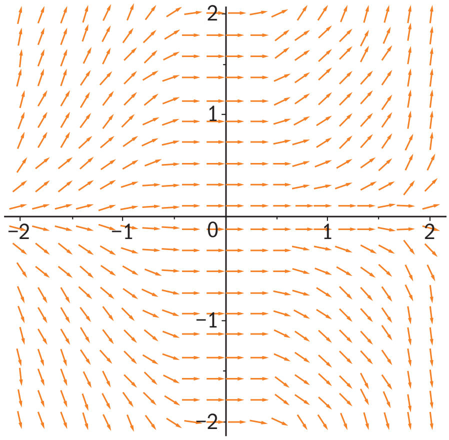
FIGUUR 1.11



FIGUUR 1.12



FIGUUR 1.13



1.3 Lineaire DV's van de 1e orde

Voor verschillende typen differentiaalvergelijkingen zijn er verschillende oplossingsmethoden.
Als er geen eenvoudige exacte methode is, zul je gebruik moeten maken van numerieke methoden. Die vallen buiten het bestek van dit boek.

Met *constante* coëfficiënt
We bekijken eerst het geval van een lineaire DV van de 1e orde met een *constante* coëfficiënt:

$$y' + a \cdot y = f(t)$$

Vermenigvuldig links en rechts met e^{at}, dan krijg je

$$y' \cdot e^{at} + a \cdot y \cdot e^{at} = f(t) \cdot e^{at}$$

Je doet dit, omdat er nu links precies de afgeleide van $y \cdot e^{at}$ staat. Ga dit na met productregel en kettingregel.

Er volgt:

$$(y \cdot e^{at})' = f(t) \cdot e^{at} \Rightarrow y \cdot e^{at} = \int f(t) \cdot e^{at}\,dt$$

Hoe je de integraal moet berekenen en wat de uitkomst is, hangt erg van de functie $f(t)$ af.
De uitkomst voor $y(t)$ vind je door de uitkomst van de integraal – met integratieconstante – te delen door e^{at}; meestal wordt dit laatste genoteerd als een vermenigvuldiging met e^{-at}.
De functie e^{at}, waar je in de eerste stap mee vermenigvuldigt, heet **integrerende factor** van de DV.

! Bedenk dat bij deze methode altijd één keer y', dus zonder factor ervoor, in je formule moet staan.
Staat er nog een factor voor de y', dan moet je eerst de hele DV door die factor delen.
Als je dat niet doet, klopt je integrerende factor niet.

De enige uitzondering is het geval waarbij in de oorspronkelijke DV al de uitkomst van de productregel staat. Dan heb je namelijk geen integrerende factor nodig.

Zie 2 van voorbeeld 1.6.

VOORBEELD 1.6

1 $y' + 3 \cdot y = 6$

Vermenigvuldig links en rechts met e^{3t}, dan krijg je

$$y' \cdot e^{3t} + y \cdot 3 \cdot e^{3t} = 6 \cdot e^{3t}$$

Links staat nu de afgeleide van $y \cdot e^{3t}$ (ga dit na met de product- en kettingregel)

Er volgt:

$(y \cdot e^{3t})' = 6 \cdot e^{3t} \Rightarrow y \cdot e^{3t} = \int 6 \cdot e^{3t} dt = 2 \cdot e^{3t} + c$

Delen door e^{3t} levert de algemene oplossing: $y = 2 + c \cdot e^{-3t}$

Omdat e^{-3t} voor zeer grote t naar nul gaat, gaat y dan naar 2; de lijn $y = 2$ is horizontale asymptoot van de oplossing *naar rechts*.

2 $2y' - 2y = 10$

Eerst deel je links en rechts door 2.

$y' - y = 5$

Vermenigvuldig links en rechts met e^{-t}, dan krijg je

$y' \cdot e^{-t} - y \cdot e^{-t} = 5 \cdot e^{-t}$

Links staat nu de afgeleide van $y \cdot e^{-t}$.

Er volgt:

$(y \cdot e^{-t})' = 5 \cdot e^{-t} \Rightarrow y \cdot e^{-t} = \int 5 \cdot e^{-t} dt = -5 \cdot e^{-t} + c$

Delen door e^{-t} is hetzelfde als vermenigvuldigen met e^{t} en levert de algemene oplossing:

$y = -5 + c \cdot e^{t}$

De lijn $y = -5$ is horizontale asymptoot van de oplossing *naar links*. Meestal ben je hierin niet geïnteresseerd, omdat je zelden terug in de tijd gaat en zeker niet zo ver.

3 $y' + 2y = e^{t}$

Vermenigvuldig links en rechts met e^{2t}, dan krijg je

$y' \cdot e^{2t} + 2y \cdot e^{2t} = e^{t} \cdot e^{2t} = e^{3t}$

Links staat nu de afgeleide van $y \cdot e^{2t}$.

Er volgt:

$(y \cdot e^{2t})' = e^{3t} \Rightarrow y \cdot e^{2t} = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t} + c$

Delen door e^{2t} levert de algemene oplossing:

$y = \frac{1}{3}e^{t} + c \cdot e^{-2t}$

4 $y' + 3y = t$

Vermenigvuldig links en rechts met e^{3t}, dan krijg je

$y' \cdot e^{3t} + 3y \cdot e^{3t} = t \cdot e^{3t}$

Links staat nu de afgeleide van $y \cdot e^{3t}$.

Er volgt:

$(y \cdot e^{3t})' = t \cdot e^{3t} \Rightarrow y \cdot e^{3t} = \int t \cdot e^{3t} dt$

Nu moet $t \cdot e^{3t}$ geïntegreerd worden. Hoe gaat dat ook alweer? Partieel! Kijk eventueel in hoofdstuk 10 van deel 1 hoe dat werkt.

Stel $f'(t) = e^{3t} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$

$g(t) = t \Rightarrow g'(t) = 1$

$\int t \cdot e^{3t} dt = \frac{1}{3}t \cdot e^{3t} - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3t} dt = \frac{1}{3}t \cdot e^{3t} - \frac{1}{9} \cdot e^{3t} + c$

Om y te krijgen moet je delen door e^{3t} en dan volgt $y = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + c \cdot e^{-3t}$

Voor zeer grote positieve t komt de grafiek hiervan in de buurt van de lijn $y = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$; dit is een *scheve* asymptoot naar rechts.

Met *niet-constante* coëfficiënt

Als de coëfficiënt van y niet constant is, dan lossen we een lineaire 1^e^ orde DV op een soortgelijke manier op als hiervoor gebeurde bij de constante coëfficiënt.

Neem de DV:

$y' + g(t) \cdot y = f(t)$

Dan kun je ook hier van de linkerkant een productregel maken door met een geschikte integrerende factor te vermenigvuldigen:

neem $e^{G(t)}$, waarbij $G(t) = \int g(t)\,dt$

In woorden: $G(t)$ is de primitieve van $g(t)$ met integratieconstante $c = 0$.

Merk op dat de integrerende factor e^{at} bij de DV met constante a ook de primitieve van a in haar exponent heeft; dat is immers at.

Verder gaat het oplossen van de DV op dezelfde manier als bij de DV met constante a.

$y' \cdot e^{G(t)} + g(t) \cdot y \cdot e^{G(t)} = f(t) \cdot e^{G(t)}$

$(y \cdot e^{G(t)})' = f(t) \cdot e^{G(t)} \Rightarrow y \cdot e^{G(t)} = \int f(t) \cdot e^{G(t)} dt$

Door de uitkomst van de integraal door $e^{G(t)}$ te delen houd je y over.

1

VOORBEELD 1.7

1 $y' + 6t \cdot y = t$

$G(t) = \int 6t\,dt = 3t^2$, dus de integrerende factor is: e^{3t^2}

$y' \cdot e^{3t^2} + 6t \cdot y \cdot e^{3t^2} = t \cdot e^{3t^2}$

Dus $(y \cdot e^{3t^2})' = t \cdot e^{3t^2} \Rightarrow y \cdot e^{3t^2} = \int t \cdot e^{3t^2} dt = \frac{1}{6}e^{3t^2} + c$

De integraal kun je berekenen met een substitutie $u = 3t^2$

De algemene oplossing: $y = \frac{1}{6} + c \cdot e^{-3t^2}$

Als t groot wordt – positief of negatief – nadert y snel tot $\frac{1}{6}$.

2 $t^2 \cdot y' + 2t \cdot y = \cos(2t)$

Merk op dat links al een productregel staat; je hebt nu geen integrerende factor nodig, want:

$(t^2 \cdot y)' = \cos(2t) \Rightarrow t^2 \cdot y = \int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(2t) + c$

Dus $y = \frac{\sin(2t) + 2c}{2t^2}$;

je mag dit ook schrijven als $y = \frac{\sin(2t) + c}{2t^2}$, want c is een willekeurig getal.

Wat nu als je niet direct de productregel in de opgave had herkend? Dan had je links en rechts moeten delen door t^2:

$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos(2t)}{t^2}$

Als integrerende factor neem je $e^{G(t)}$ met $G(t) = \int \frac{2}{t}\,dt = 2\ln|t|$

Maar omdat $e^{2\ln|t|} = |t|^2 = t^2$ krijg je de oorspronkelijke vergelijking weer terug. Met dit verschil: je weet nu dat er een productregel in voorkomt! Kijk dus altijd even of er niet toevallig al een productregel in je DV staat.

OPGAVEN

1.12 Los op met een integrerende factor:

a $y' - 2y = 3$
b $y' + 4y = 2e^t$
c $y' - 3y = 6t$
d $2y' + 4y = 3$
e $y' + y = \sin(t)$
f $y' - 4y = 6e^{2t}$

1.13 Los op met een integrerende factor:

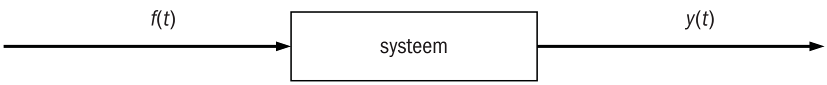
a $y' + 2ty = t$
b $ty' + y = t$
c $y' + y \cdot \tan(t) = \cos(t)$
d $y' + \cos(t) \cdot y = 3\cos(t)$
e $y' \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t) = e^t$
f $t^2y' + 2ty = 1$

1.4 Lineaire systemen en superpositie

Een DV die lineair is en van de 1e orde, kun je noteren als $y' + g(t) \cdot y = f(t)$. De 1e orde geeft aan dat alleen de eerste afgeleide y' een rol speelt en lineair betekent hier dat alleen de eerste macht van y' in de DV voorkomt.

We noemen $f(t)$ de **input**, die is bekend, en $y(t)$ heet de **output** of **responsie** en die moet berekend worden.
Zo'n systeem kan schematisch als volgt worden weergegeven:

FIGUUR 1.14 Lineaire systeem



Of nog compacter: $f \rightarrow y$

Dit betekent dus dat $y' + g(t) \cdot y = f(t)$

1 Als nu $f_1 \rightarrow y_1$ en $f_2 \rightarrow y_2$, dan volgt $f_1 + f_2 \rightarrow y_1 + y_2$

Dit geldt, omdat uit de gegevens volgt: $y_1' + g(t) \cdot y_1 = f_1(t)$

$y_2' + g(t) \cdot y_2 = f_2(t)$

Optellen levert $y_1' + y_2' + g(t) \cdot y_1 + g(t) \cdot y_2 = f_1(t) + f_2(t)$

Oftewel: $(y_1 + y_2)' + g(t) \cdot (y_1 + y_2) = f_1(t) + f_2(t)$

Dit vanwege een eigenschap die voor differentiëren geldt:
afgeleide van een som is som van de afgeleiden.

2 Als $f \rightarrow y$, dan $af \rightarrow ay$

Dit geldt omdat uit $y' + g(t) \cdot y = f(t)$ volgt $a \cdot y' + a \cdot g(t) \cdot y = a \cdot f(t)$
En dit is gelijk aan: $(a \cdot y)' + g(t) \cdot a \cdot y = a \cdot f(t)$, omdat afgeleide van (constante * functie) gelijk is aan constante * afgeleide van functie.

Deze eigenschappen samen tonen de lineariteit van de bewerking aan.
Dit wordt ook wel het **superpositiebeginsel** genoemd.

Door gebruik te maken van het superpositiebeginsel kun je lineaire 1e orde DV's ook als volgt oplossen.

Gegeven DV: $y' + g(t) \cdot y = f(t)$

Los eerst op: $y' + g(t) \cdot y = 0$

Dit heet de **homogene DV** met (algemene) oplossing $y_{hom} = c \cdot e^{-G(t)}$.

1

Bepaal nu één oplossing van de oorspronkelijke DV (een *particuliere* oplossing y_{part}).
Een particuliere oplossing is meestal van dezelfde vorm als de input.

En de algemene oplossing van de DV is dan $y_{alg} = y_{hom} + y_{part}$

De oplossing y_{hom} van de homogene DV heet de **natuurlijke responsie**. Dit is de toestand van het systeem als er geen uitwendige invloeden optreden; deze zal op den duur meestal uitsterven. De **gedwongen responsie** y_{part} wordt veroorzaakt door de input en geeft de situatie op langere termijn weer, in het geval dat y_{hom} uitdooft – wat in de praktijk meestal het geval is.

VOORBEELD 1.8

1 $y' - y = 6$

De hierbij behorende homogene DV is

$y' - y = 0$

De oplossing hiervan is te bepalen door het scheiden van variabelen of met een integrerende factor.
De oplossing is

$y_{hom} = c \cdot e^t$; dit is de natuurlijke responsie.

Een particuliere oplossing kun je in dit geval direct zien:

$y_{part} = -6$, want $-1 * -6 = 6$ en de afgeleide is nul.

Dit is de gedwongen responsie.
De algemene oplossing is nu:

$y_{alg} = c \cdot e^t - 6$

2 $y' + 3y = t$

Deze DV hebben we eerder opgelost met partiële integratie, maar het kan ook anders.
Eerst los je nu de homogene DV op:

$y' + 3y = 0$

Met scheiden van variabelen of een integrerende factor vind je

$y_{hom} = c \cdot e^{-3t}$

Deze oplossing is nogal standaard; je mag die ook zonder berekening geven.
Als $y' + g(t) \cdot y = 0$, dan $y_{hom} = c \cdot e^{-G(t)}$

Je moet echter wel begrijpen waar de oplossing vandaan komt!

Nu moet je nog een particuliere oplossing zien te vinden.
Omdat de input t lineair is en de afgeleide daarvan constant, zal y_{part} ook wel een lineaire functie zijn, maar welke?

Probeer $y = at + b$, als '*proefoplossing*'; dan is $y' = a$.
En $y' + 3y = a + 3(at + b) = 3at + a + 3b$
Dit kan alleen gelijk zijn aan t, als $3a = 1$ en $a + 3b = 0$
Dit levert $a = \frac{1}{3}$ en $b = -\frac{1}{9}$; dus $y_{part} = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$

$y_{alg} = c \cdot e^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$

3 $y' + 2t \cdot y = 3t$

Homogene DV: $y' + 2t \cdot y = 0$ met $y_{hom} = c \cdot e^{-t^2}$

Een particuliere oplossing is $y_{part} = \frac{3}{2}$, dus $y_{alg} = c \cdot e^{-t^2} + \frac{3}{2}$

4 $y' - 4y = 2\sin(t)$

$y_{hom} = c \cdot e^{4t}$

Een particuliere oplossing zal een lineaire combinatie moeten zijn van $\sin(t)$ en $\cos(t)$, want met de input $f(t) = 2\sin(t)$ volgt $f'(t) = 2\cos(t)$.

Probeer $y = a \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(t)$, als proefoplossing
Dan $y' = a \cdot \cos(t) - b \cdot \sin(t)$
En $y' - 4y = a \cdot \cos(t) - b \cdot \sin(t) - 4\{a \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(t)\}$
$= (-b - 4a) \cdot \sin(t) + (a - 4b) \cdot \cos(t)$
Dit laatste moet gelijk zijn aan $2\sin(t)$, dus $-b - 4a = 2$ en $a - 4b = 0$

Dan $b = -\frac{2}{17}$ en $a = -\frac{8}{17}$

$y_{alg} = c \cdot e^{4t} - \frac{8}{17}\sin(t) - \frac{2}{17}\cos(t)$

5 $y' - 2y = 3x^2 + 5x - 2$

$y_{hom} = c \cdot e^{2t}$

Een particuliere oplossing zal de vorm hebben: $y_{part} = ax^2 + bx + c$
Dan $y'_{part} = 2ax + b$
Invullen in de DV levert drie vergelijkingen:

$-2a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$
$2a - 2b = 5 \Rightarrow b = -4$
$b - 2c = -2 \Rightarrow c = -1$

$y_{alg} = -\frac{3}{2}x^2 - 4x - 1 + c \cdot e^{2t}$

1

Toepassingen
In paragraaf 1.1 zijn enkele toepassingen aan de orde gekomen. Hier zullen we er nog een behandelen.

Verdunning van een oplossing
In een vat zit 50 liter water, waarin 2 kg zout is opgelost.
Onderaan het vat stroomt elke minuut 3 liter van de oplossing weg, terwijl bovenin elke minuut 3 liter schoon water wordt toegevoegd. De oplossing wordt goed geroerd.
Hoeveel zout zit er na 10 minuten nog in het vat?

Stel dat na t minuten nog p kg zout in het vat zit. Dat is $\frac{p}{50}$ kg/l.

In dt minuten stroomt er 3dt liter oplossing weg met $\frac{p}{50}$ 3dt kg zout.
Dus de verandering in de hoeveelheid zout in een periode dt is gelijk aan

$$\mathrm{d}p = -\frac{p}{50}3\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = -0{,}06\mathrm{d}t \Rightarrow p = c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}06t}$$

Op $t = 0$ is $p = 2$, dus $c = 2$ en $p = 2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}06t}$

Na 10 minuten is $p = 2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}6} = 1{,}10$ kg

Hetzelfde principe kun je gebruiken bij het zuiveren van de lucht in een ruimte door schone lucht naar binnen te blazen.

OPGAVEN

1.14 Bepaal de *algemene* oplossing van de volgende DV's door eerst de *homogene* DV op te lossen en vervolgens een *particuliere* oplossing te bepalen.

a $y' - 2y = 6$
b $y' + 3y = 2t$
c $y' + 2y = \sin(t)$
d $y' + ty = 2t$
e $y' - 3y \cdot \cos(t) = 2\cos(t)$
f $y' + 5y = 3e^t - 4$
g $y' + 4y = 2x^2 - 6x + 7$
h $y' - 3y = 5\sin(t) + 4e^t - 2$

1.15 **a** Los de DV op die hoort bij de afkoelingswet van Newton:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \alpha(T - T_{omg})$$

Een voorwerp van 120 °C wordt geplaatst in een omgeving van 20 °C.
Na tien minuten is het voorwerp afgekoeld tot 80 °C.

b Wat is de temperatuur na een uur?
c Hoe lang duurt het tot de temperatuur van het voorwerp 21 °C is?

1.16 Bepaal de natuurlijke responsie van de DV die hoort bij de RC-keten:

$$RC \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = u$$

1.5 Lineaire DV's van de 2e orde met constante coëfficiënten

De algemene vorm van een lineaire 2e orde DV met constante coëfficiënten is:

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

Hierin is $f(t)$ weer de gegeven *input* en $y(t)$ de te berekenen *output* of *responsie*.
Voorbeelden van situaties waarbij deze DV's optreden, zijn voor werktuigbouwkunde het massa-veersysteem en voor elektrotechniek de RLC-keten (weerstand-spoel-condensator). Deze toepassingen komen aan de orde in 1.5.4.

1.5.1 Oplossing homogene DV

We bepalen eerst de oplossing van de *homogene* DV:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Stel $y = e^{\lambda t}$, dan volgt met de kettingregel: $y' = \lambda e^{\lambda t}$ en $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$.
Invullen in de homogene DV levert:

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c) \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Omdat $e^{\lambda t} > 0$ voor alle waarden van t en λ kan $y = e^{\lambda t}$ alleen oplossing zijn als

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Deze vergelijking heet de **karakteristieke vergelijking** (KV) van de homogene DV.

Er zijn nu drie mogelijkheden voor deze kwadratische vergelijking:

1 $D = b^2 - 4ac > 0$

De karakteristieke vergelijking heeft in dit geval twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2.
Het superpositiebeginsel levert dan als oplossing voor de homogene DV:

$y_{hom} = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ met willekeurige reële A en B

2 $D = b^2 - 4ac = 0$

De karakteristieke vergelijking heeft nu precies één reële oplossing $\lambda = \frac{-b}{2a}$.
Behalve $y = e^{\lambda t}$ voldoet nu ook $y = t \cdot e^{\lambda t}$, zoals blijkt uit het volgende (met gebruik van product- en kettingregel, ga na!).

$y = te^{\lambda t} \Rightarrow$
$y' = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} = (1 + \lambda t) \cdot e^{\lambda t} \Rightarrow$
$y'' = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t} = (2\lambda + \lambda^2 t) \cdot e^{\lambda t}$

Ingevuld bij $ay'' + by' + cy$ geeft dit

$a \cdot (2\lambda + \lambda^2 t) \cdot e^{\lambda t} + b \cdot (1 + \lambda t) \cdot e^{\lambda t} + c \cdot te^{\lambda t} =$
$(a\lambda^2 + b\lambda + c) \cdot te^{\lambda t} + (2a\lambda + b) \cdot e^{\lambda t} = 0,$

want $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, omdat λ oplossing is van de karakteristieke vergelijking en $2a\lambda + b = 0$, omdat $\lambda = \frac{-b}{2a}$ tweevoudig nulpunt is (D = 0).

Het superpositiebeginsel levert dan als oplossing voor de homogene DV:

$y_{hom} = A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot te^{\lambda t}$ met willekeurige reële A en B

3 $D = b^2 - 4ac < 0$

De karakteristieke vergelijking heeft geen reële oplossingen, maar wel twee verschillende complexe:

$\lambda_1 = \frac{-b + j \cdot \sqrt{-D}}{2a}$ en $\lambda_2 = \frac{-b - j \cdot \sqrt{-D}}{2a}E$

Met het superpositiebeginsel krijg je

$y_{hom} = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ met willekeurige reële A en B

Dat λ_1 en λ_2 complexe getallen zijn, maakt voor het differentiëren niet uit, het blijven constanten.

Bij een reëel fysisch probleem hoort echter een reële oplossing.
Die gaan we nu uit de complexe oplossingen afleiden.

Stel $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ en $\lambda_2 = \alpha - j\omega$, dus $\alpha = \frac{-b}{2a}$ en $\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$
Van een complexe oplossing van de homogene DV zijn het reële deel en het imaginaire deel afzonderlijk ook oplossingen van de homogene DV. Dit volgt uit het feit dat een complex getal alleen nul kan zijn, als zowel het reële deel als het imaginaire deel nul zijn.

Dan weten we dat met $e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha + j\omega)t} = e^{\alpha t}e^{j\omega t} = e^{\alpha t}\{\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)\}$ ook $e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ en $e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ oplossingen zijn.

De algemene reële oplossing van de homogene DV is dan
$y_{hom} = e^{\alpha t}\{A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)\}$ met willekeurige reële A en B

Of als wisselsignaal geschreven:

$y_{hom} = Ce^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ met $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ en $\tan(\varphi) = -\frac{B}{A}$

1

VOORBEELD 1.9

1 $y'' - 3y' - 10y = 0$
De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ met oplossingen $\lambda_1 = 5$ en $\lambda_2 = -2$.
De oplossing is $y_{hom} = A \cdot e^{5t} + B \cdot e^{-2t}$

2 $y'' + 8y' + 16y = 0$
De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ met oplossing $\lambda = -4$.
De oplossing is $y_{hom} = A \cdot e^{-4t} + B \cdot t\, e^{-4t} = (A + B \cdot t) \cdot e^{-4t}$

3 $y'' - 6y' + 13y = 0$
De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ met oplossingen $\lambda_1 = 3 + 2j$ en $\lambda_2 = 3 - 2j$.
De oplossing is $y_{hom} = e^{3t}\{A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t)\}$

OPGAVEN

1.17 Los op:

a $y'' + 4y' + 4y = 0$
b $y'' + 6y' + 25y = 0$
c $y'' - 7y' - 8y = 0$
d $y'' - 8y' + 41y = 0$
e $y'' + 9y = 0$
f $y'' - 4y' + y = 0$
g $2y'' + 4y' + 2y = 0$
h $y'' - 2y' + 3y = 0$

1.5.2 Particuliere oplossing

We gaan nu een *particuliere* oplossing bepalen van de DV
$ay'' + by' + cy = f(t)$
Voor de algemene oplossing van de DV geldt – net als bij de 1e orde DV:
$y_{alg} = y_{hom} + y_{part}$
De werkwijze voor het vinden van een particuliere oplossing is ook nu weer sterk afhankelijk van de input $f(t)$. Bijna altijd is y_{part} een uitdrukking waarin $f(t)$ en de afgeleiden $f'(t)$ en $f''(t)$ terug te vinden zijn. We nemen daarom als proefoplossing een lineaire combinatie van deze drie functies.

We behandelen de vormen van $f(t)$ die in de praktijk vaak voorkomen:

A $f(t) = ke^{nt}$
B $f(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$
C $f(t) = p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$
D $f(t) = e^{nt}g(t)$ met $g(t)$ van de vorm B of C

A $ay'' + by' + cy = ke^{nt}$

We onderscheiden drie gevallen, elk met een eigen aanpak:

1 n is *geen* oplossing van de karakteristieke vergelijking, dus $an^2 + bn + c \neq 0$.
Dan is er een proefoplossing $y = \gamma e^{nt}$, waarvan we γ kunnen berekenen

$$y = \gamma e^{nt} \Rightarrow y' = \gamma n\, e^{nt} \Rightarrow y'' = \gamma n^2\, e^{nt}$$

Invullen bij de DV levert:

$(an^2 + bn + c)\gamma e^{nt} = ke^{nt} \Rightarrow \gamma = \frac{k}{an^2 + bn + c}$

Deze breuk bestaat, want $an^2 + bn + c \neq 0$ volgens de aanname.

$y_{\text{part}} = \frac{k}{an^2 + bn + c} e^{nt}$

2 n is een *enkelvoudige* oplossing van de karakteristieke vergelijking.

Voor elke A is $y = A\,e^{nt}$ een oplossing van de homogene vergelijking $ay'' + by' + cy = 0$, dus kan *niet* gelden $ay'' + by' + cy = ke^{nt}$

Probeer nu als proefoplossing $y = \gamma t\, e^{nt}$, waarvan we γ gaan berekenen.

$y = \gamma t\, e^{nt} \Rightarrow y' = (1 + nt)\gamma e^{nt} \Rightarrow y'' = (2n + n^2 t)\gamma e^{nt}$

Ingevuld in de DV $ay'' + by' + cy = ke^{nt}$ levert dit:

$a(2n + n^2 t)\gamma e^{nt} + b(1 + nt)\gamma e^{nt} + ct\,\gamma e^{nt} =$

$(an^2 + bn + c)\gamma t\, e^{nt} + (2an + b)\gamma e^{nt} = ke^{nt}$

Omdat n een oplossing van de karakteristieke vergelijking is, geldt dat $an^2 + bn + c = 0$ en $2an + b \neq 0$, omdat het geen tweevoudige oplossing is.
Daarom is $\gamma = \frac{k}{2an + b}$ en $y_{part} = \frac{k}{2an + b} t\, e^{nt}$

3 n is een *tweevoudige* oplossing van de karakteristieke vergelijking.
Dan $an^2 + bn + c = 0$ en $2an + b = 0$, want $n = \frac{-b}{2a}$
Neem als proefoplossing $y = \gamma t^2\, e^{nt}$ en bereken γ.

$y = \gamma t^2\, e^{nt} \Rightarrow y' = (2t + nt^2)\gamma e^{nt} \Rightarrow y'' = (2 + 4nt + n^2 t^2)\gamma e^{nt}$

Ingevuld in de DV $ay'' + by' + cy = ke^{nt}$ levert dit:

$a(2 + 4nt + n^2 t^2)\gamma e^{nt} + b(2t + nt^2)\gamma e^{nt} + c\gamma t^2\, e^{nt} =$

$(an^2 + bn + c) \cdot t^2 \gamma e^{nt} + (4an + 2b) \cdot t\gamma e^{nt} + 2a\gamma e^{nt} = ke^{nt}$

Maar omdat $an^2 + bn + c = 0$ en $2an + b = 0$ blijft over $2a\gamma e^{nt} = ke^{nt}$

Daarom is $\gamma = \frac{k}{2a}$ en dan $y_{part} = \frac{k}{2a} t^2 e^{nt}$

Overzicht voor particuliere oplossing van DV: $ay'' + by' + cy = ke^{nt}$

- Als n *geen* oplossing van de KV is, dan probeer je $y = \gamma e^{nt}$ en je berekent $\gamma = \frac{k}{an^2 + bn + c}$

- Als n een *enkelvoudige* oplossing van de KV is, dan probeer je $y = \gamma t\, e^{nt}$ en je berekent

  $\gamma = \frac{k}{2an + b}$

- Als n een *tweevoudige* oplossing van de KV is, dan probeer je $y = \gamma t^2\, e^{nt}$ en je berekent

  $\gamma = \frac{k}{2a}$

VOORBEELD 1.10

Om van onderstaande DV's de particuliere oplossingen te vinden, kun je de in het voorgaande afgeleide algemene formules gebruiken.
Je kunt ook – op dezelfde manier als de formules berekend zijn – de getallen berekenen.
In de voorbeelden worden de formules gebruikt en vervolgens worden de resultaten gecontroleerd.

1 $y'' + 5y' - 4y = 2e^{3t}$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$;
3 is hiervan *geen oplossing*, want 3 invullen levert 20.
Een particuliere oplossing van de DV is dan

$y_{part} = \gamma e^{3t}$ met $\gamma = \frac{k}{an^2 + bn + c} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, want $k = 2$ en $n = 3$

Dus $y_{part} = \frac{1}{10}\, e^{3t}$

Controle: $y = \frac{1}{10}\, e^{3t} \Rightarrow y' = \frac{3}{10} e^{3t} \Rightarrow y'' = \frac{9}{10} e^{3t}$

$y'' + 5y' - 4y = \frac{9 + 15 - 4}{10} e^{3t} = 2e^{3t}$

2 $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4t}$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ met oplossingen
$\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 4$
Dus 4 is een *enkelvoudige oplossing*.
Een particuliere oplossing van de DV is dan

$y_{part} = \gamma t e^{4t}$ met $\gamma = \frac{k}{2an + b} = \frac{3}{2}$, want $k = 3$ en $n = 4$

Dus $y_{part} = \frac{3}{2} t e^{4t}$

Controle: $y = \frac{3}{2} t e^{4t} \Rightarrow y' = (\frac{3}{2} + 6t)e^{4t} \Rightarrow y'' = (12 + 24t)e^{4t}$

$y'' - 6y' + 8y = 3e^{4t}$

3 $y'' + 2y' + y = 5e^{-t}$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$;
$\lambda = -1$ is een *tweevoudige oplossing*, want $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$
Een particuliere proefoplossing van de DV is dan

$y_{part} = \gamma t^2 e^{-t}$ met $\gamma = \frac{k}{2a} = \frac{5}{2} \Rightarrow y_{part} = \frac{5}{2}t^2 e^{-t}$

Controle: $y = \frac{5}{2}t^2 e^{-t} \Rightarrow y' = (5t - \frac{5}{2}t^2)e^{-t} \Rightarrow y'' = (5 - 10t + \frac{5}{2}t^2)e^{-t}$

$y'' + 2y' + y = 5e^{-t}$

OPGAVEN

1.18 Bepaal een particuliere oplossing van de DV en controleer die oplossing:

a $y'' - 3y' + 4y = 5e^{2t}$
b $y'' + 2y' - 5y = 4e^{t}$
c $y'' + 2y' - 3y = 8e^{-3t}$
d $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2t}$
e $y'' - 2y = 4e^{3t}$
f $y'' - 2y' - 8y = e^{4t}$
g $y'' + 5y' = 3e^{-t}$
h $y'' - 2y' + y = 5e^{t}$

B $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

Deze vorm kan omgezet worden in een vorm met e-machten: $e^{j\omega t}$ en $e^{-j\omega t}$
Uit methode A volgt dan:

- als ωj *geen oplossing* van de karakteristieke vergelijking is, dan bestaat er een particuliere oplossing van de vorm:

  $y_{part} = \alpha \cdot \cos(\omega t) + \beta \cdot \sin(\omega t)$

- als ωj *wel oplossing* van de karakteristieke vergelijking is, dan bestaat er een particuliere oplossing van de vorm:

  $y_{part} = t\{\alpha \cdot \cos(\omega t) + \beta \cdot \sin(\omega t)\}$

  Deze vorm wordt in paragraaf 1.5.3 behandeld in het kader van de overdrachtsfunctie door gebruik te maken van complexe rekenmethoden.

VOORBEELD 1.11

1 $y'' - 4y' + 3y = 5\cos(2t) - 2\sin(2t)$

2j is geen oplossing van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, dus er is een particuliere oplossing van de vorm

$y = \alpha \cdot \cos(2t) + \beta \cdot \sin(2t) \Rightarrow$

$y' = -2\alpha \cdot \sin(2t) + 2\beta \cdot \cos(2t) \Rightarrow$

$y'' = -4\alpha \cdot \cos(2t) - 4\beta \cdot \sin(2t)$

Invullen levert: $\left.\begin{array}{r} -\alpha - 8\beta = 5 \\ 8\alpha - \beta = -2 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha = -\frac{23}{130}$ en $\beta = \frac{38}{65}$

Dus $y_{part} = -\frac{23}{130}\cos(2t) + \frac{38}{65}\sin(2t)$

De algemene oplossing is $y = Ae^{3t} + Be^{t} - \frac{23}{130}\cos(2t) + \frac{38}{65}\sin(2t)$

2 $y'' + 9y = 4\cos(3t) + 2\sin(3t)$

3j is een oplossing van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 9 = 0$, dus er is een particuliere oplossing van de vorm

$y = t\{\alpha \cdot \cos(3t) + \beta \cdot \sin(3t)\} \Rightarrow$

$y' = (\alpha + 3\beta t) \cdot \cos(3t) + (\beta - 3\alpha t) \cdot \sin(3t) \Rightarrow$

$y'' = (6\beta - 9\alpha t) \cdot \cos(3t) + (-6\alpha - 9\beta t) \cdot \sin(3t) \Rightarrow$

Invullen levert: $\left.\begin{matrix} 6\beta = 4 \\ -6\alpha = 2 \end{matrix}\right] \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$ en $\beta = \frac{2}{3}$

Dus $y_{part} = t\{-\frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)\}$

De algemene oplossing is

$y = A\cos(3t) + B\sin(3t) + t\{-\frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)\}$

OPGAVEN

1.19 Bepaal een particuliere oplossing.

a $y'' - 3y' + 4y = 2\cos(3t) + 5\sin(3t)$
b $y'' + 2y' - 3y = \cos(2t) - \sin(2t)$
c $y'' + y = 3\cos(t) + 2\sin(t)$
d $y'' + 3y' + 3y = -4\cos(t) + \sin(t)$
e $y'' - 2y = \sin(t) + 3\cos(2t)$

C $f(t) = p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$

Bij de homogene DV $ay'' + by' + cy = 0$ hoort KV $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

- Als $c \neq 0$, dan is er een particuliere oplossing $q_n(t)$, een polynoom van de graad n.
- Als $c = 0$ en $b \neq 0$, dan is er een particuliere oplossing van de vorm $t \cdot q_n(t)$, dus een functie van graad $n + 1$. Omdat $c = 0$, komen alleen de eerste en tweede afgeleide in de DV voor en zou er zonder die extra factor t nooit een functie van graad n uit kunnen komen.
- Als behalve $c = 0$ ook $b = 0$ moet je beginnen met een functie van graad $n + 2$: $t^2 \cdot q_n(t)$; de tweede afgeleide is dan van graad n. Omdat de DV de vorm $ay'' = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ heeft, is het handiger om de DV op te lossen door links en rechts tweemaal te integreren.

1

VOORBEELD 1.12

1 $y'' + 7y' + 10y = 3t - 2$

Omdat $c \neq 0$ probeer je

$y = at + b \Rightarrow y' = a \Rightarrow y'' = 0$

Invullen in DV levert:

$y'' + 7y' + 10y = 0 + 7a + 10(at + b) = 3t - 2$

Dan

$$\left.\begin{array}{r} 10a = 3 \Rightarrow a = 0{,}3 \\ 7a + 10b = -2 \Rightarrow b = -0{,}41 \end{array}\right] \Rightarrow y_{part} = 0{,}3t - 0{,}41$$

2 $y'' + 5y' + 6y = t^2 - 4$

Omdat $c \neq 0$ probeer je

$y = at^2 + bt + c \Rightarrow y' = 2at + b \Rightarrow y'' = 2a$

Invullen in de DV levert:

$y'' + 5y' + 6y = 2a + 5(2at + b) + 6(at^2 + bt + c)$
$= 6at^2 + (10a + 6b)t + (2a + 5b + 6c) = t^2 - 4$

Dan $6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

$10a + 6b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{18}$

$2a + 5b + 6c = -4 \Rightarrow c = -2\frac{17}{18}$

En $y_{part} = \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t - 2\frac{17}{18}$

3 $y'' - 2y' = t^2 + 4t - 3$

Omdat $c = 0$, probeer je

$y = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct \Rightarrow$

$y' = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow y'' = 6at + 2b$

Invullen in de DV levert:

$y'' - 2y' = 6at + 2b - 2(3at^2 + 2bt + c)$

$= -6at^2 + (6a - 4b)t + (2b - 2c)$

Dan

$$\left.\begin{array}{r} -6a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \\ 6a - 4b = 4 \Rightarrow b = -\frac{5}{4} \\ 2b - 2c = -3 \Rightarrow c = \frac{1}{4} \end{array}\right] \Rightarrow y_{part} = -\tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{5}{4}t^2 + \tfrac{1}{4}t$$

4 $y'' = t^5 - 3t - 2$

Dit is het geval met $b = c = 0$

Links en rechts integreren levert:

$y' = \frac{1}{6}t^6 - \frac{3}{2}t^2 - 2t + c$

En nogmaals integreren:

$y = \frac{1}{42}t^7 - \frac{1}{2}t^3 - t^2 + ct + d$

Voor c en d mag je willekeurige waarden invullen voor *een* particuliere oplossing.

Met $c = d = 0$ krijg je:

$y_{part} = \frac{1}{42}t^7 - \frac{1}{2}t^3 - t^2$

OPGAVEN

1.20 Bepaal een particuliere oplossing.

a $y'' + 3y' + 2y = t - 3$

b $y'' - 2y' - 3y = t^2 + 5t - 7$

c $y'' = 2t^4 + 3t^2 - 6$

d $y'' + 2y' = t^3 - 4t + 1$

D $f(t) = e^{nt}g(t)$ met $g(t)$ van de vorm B of C

Stel $y = ze^{nt} \Rightarrow y' = z'e^{nt} + zne^{nt} \Rightarrow y'' = z''e^{nt} + 2z'ne^{nt} + zn^2e^{nt}$

Dit ingevuld bij $ay'' + by' + cy = e^{nt}g(t)$ en gedeeld door e^{nt} levert:

$az'' + (2an + b)z' + (an^2 + bn + c)z = g(t)$

Afhankelijk van $g(t)$ kan deze DV op manier B of C opgelost worden.

VOORBEELD 1.13

1 $y'' + 3y' + 2y = t^2e^t$

Stel $y = ze^t \Rightarrow y' = z'e^t + ze^t \Rightarrow y'' = z''e^t + 2z'e^t + ze^t$

Dit ingevuld bij de DV en gedeeld door e^t wordt:

$z'' + 5z' + 6z = t^2$

Probeer $z = at^2 + bt + c \Rightarrow z' = 2at + b \Rightarrow z'' = 2a$

Dan $z'' + 5z' + 6z = 6at^2 + (10a + 6b)t + 6c = t^2$

Dus $6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

$10a + 6b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{18}$

$6c = 0 \Rightarrow c = 0$

Daarom $z = \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t \Rightarrow y_{part} = \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t\right) \cdot e^t$

Ga na dat de algemene oplossing van de DV met karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, dan is:

$y = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t\right) \cdot e^t$

2 $y'' + 2y = te^{3t}$
Stel $y = ze^{3t} \Rightarrow y' = (z' + 3z)e^{3t} \Rightarrow y'' = (z'' + 6z' + 9z)e^{3t}$
$y'' + 2y = (z'' + 6z' + 11z)e^{3t} = te^{3t}$
Dus $z'' + 6z' + 11z = t$
Probeer $z = at + b \Rightarrow z' = a \Rightarrow z'' = 0$
Invullen in DV geeft:
$11at + 6a + 11b = t$
Dan

$$\left.\begin{aligned} 11a = 1 &\Rightarrow a = \tfrac{1}{11} \\ 6a + 11b = 0 &\Rightarrow b = -\tfrac{6}{121} \end{aligned}\right] \Rightarrow y_{part} = \left(\tfrac{1}{11}t - \tfrac{6}{121}\right) \cdot e^{3t}$$

Met karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 2 = 0$ volgt de algemene oplossing:

$y = A\cos(t\sqrt{2}) + B\sin(t\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{11}t - \frac{6}{121}\right) \cdot e^{3t}$

3 $y'' - y' - 2y = \sin(t)e^{2t}$

Stel $y = ze^{2t} \Rightarrow y' = z'e^{2t} + 2ze^{2t} \Rightarrow y'' = z''e^{2t} + 4z'e^{2t} + 4ze^{2t}$

Dit ingevuld bij de DV en gedeeld door e^{2t} wordt:

$z'' + 3z' + 2z = \sin(t)$

Omdat j geen oplossing is van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, probeer je

$z = a\cos(t) + b\sin(t) \Rightarrow$

$z' = -a\sin(t) + b\cos(t) \Rightarrow$

$z'' = -a\cos(t) - b\sin(t)$

Invullen levert: $(a + 3b)\cos(t) + (-3a + b)\sin(t) = \sin(t)$

Dan $\left.\begin{aligned} a + 3b &= 0 \\ -3a + b &= 1 \end{aligned}\right] \Rightarrow a = -\frac{3}{10}$ en $b = \frac{1}{10}$

en $z = -\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t) \Rightarrow y_{part} = \{-\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t)\} \cdot e^{2t}$

Met de karakteristieke vergelijking van de oorspronkelijke DV $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ leidt dit tot de algemene oplossing:

$$y = Ae^{2t} + Be^{-t} + \{-\tfrac{3}{10}\cos(t) + \tfrac{1}{10}\sin(t)\} \cdot e^{2t}$$

$$= Be^{-t} + \{A - \tfrac{3}{10}\cos(t) + \tfrac{1}{10}\sin(t)\} \cdot e^{2t}$$

OPGAVEN

1.21 Bepaal een particuliere oplossing en vervolgens de algemene oplossing van:

a $y'' - 2y' - 3y = te^t$
b $y'' + 4y' + 4y = t^3e^{2t}$
c $y'' + y' - 2y = \frac{\sin(t)}{e^t}$
d $y'' - 5y' - 6y = \cos(t)e^{3t}$
e $y'' + 3y = te^{2t}$
f $y'' + y' = t + \sin(t)e^t$

1.5.3 De overdrachtsfunctie

In deze paragraaf zal veelvuldig gebruikgemaakt worden van de wiskunde die je geleerd hebt in het hoofdstuk complexe getallen – deel 1, hoofdstuk 11. Als je die kennis en die vaardigheden niet paraat hebt, is het verstandig ze eerst op te frissen.

Zoals bekend is de algemene vorm van een lineaire 2^e^ orde DV met constante coëfficiënten:

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

We zoeken nu een particuliere oplossing in het geval dat de input $f(t)$ een wisselsignaal is.
Een wisselsignaal is een functie van de vorm:

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \text{ met } A > 0$$

In deze formule is A de amplitude, ω de hoekfrequentie en φ de fase.
In paragraaf 1.5.2 kwam kort het geval ter sprake waarbij $u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.
Dit is ook te schrijven als een wisselsignaal met $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $\tan(\varphi) = -\frac{b}{a}$.

Als de input $u(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, dan is de output $v(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Met de overdrachtsfunctie berekenen we de **amplitudeverhouding** $\frac{A_2}{A_1}$ en het **faseverschil** $\varphi_2 - \varphi_1$. Merk op dat de frequentie niet verandert.

Bij het reële wisselsignaal $u(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ hoort het *complexe wisselsignaal*

$$U(t) = A_1 e^{(\omega t + \varphi_1)j}.$$

Nu is $u(t) = \mathrm{Re}(U(t))$
en $U(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = A_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} = \alpha_1 e^{j\omega t}$

met constante $\alpha_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$, de fasevector van het complexe wisselsignaal.

Als v oplossing is van $av'' + bv' + cv = u(t)$, dan is het complexe wisselsignaal V oplossing van $aV'' + bV' + cV = U(t)$.

1

We zoeken een particuliere oplossing $V = \alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ van
$aV'' + bV' + cV = \alpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.
Met $V' = \mathrm{j}\omega\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ en $V'' = (\mathrm{j}\omega)^2\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ volgt:
$a(\mathrm{j}\omega)^2\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + b\mathrm{j}\omega\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + c\,\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \alpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
oftewel $\{a(\mathrm{j}\omega)^2 + b\mathrm{j}\omega + c\}\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \alpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
Hieraan wordt voldaan als $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{a(\mathrm{j}\omega)^2 + b\mathrm{j}\omega + c}$ en de noemer ongelijk nul is; dus

$$V = \frac{\alpha_1}{a(\mathrm{j}\omega)^2 + b\mathrm{j}\omega + c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

De functie $H(\omega) = \frac{1}{a(\mathrm{j}\omega)^2 + b\mathrm{j}\omega + c}$ heet de **overdrachtsfunctie**.
Dit kun je uitwerken tot $H(\omega) = \frac{1}{c - a\omega^2 + b\mathrm{j}\omega}$, maar de eerste formule is overzichtelijker en daardoor gemakkelijker te onthouden.
Particuliere oplossing (gedwongen deel van de responsie) bij input $U(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ is
$V(t) = H(\omega)U(t) = H(\omega)\alpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

Omdat $u(t) = \mathrm{Re}(U(t))$ en $v(t) = \mathrm{Re}(V(t))$, volgt voor de amplitudeverhouding tussen v en u:
$\frac{|V|}{|U|} = \left|\frac{V}{U}\right| = |H(\omega)|$
En het faseverschil is $\arg(V) - \arg(U) = \arg(\frac{V}{U}) = \arg(H(\omega))$

VOORBEELD 1.14

1 $v'' + 2v' + 8v = u$

$H(\omega) = \frac{1}{8 - \omega^2 + 2\mathrm{j}\omega} \Rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(8 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2}}$
Stel $\omega^2 = x$, dan staat er onder het wortelteken:
$(8 - x)^2 + 4x = x^2 - 12x + 64 = (x - 6)^2 + 28$
Deze uitdrukking heeft *minimum* 28 voor $x = 6$ (dalparabool).
Dan is $|H(\omega)|$ *maximaal* $\frac{1}{\sqrt{28}}$ voor $\omega = \sqrt{6}$

Voor de grafiek van $|H(\omega)|$ zie figuur 1.15.

FIGUUR 1.15 Grafiek van |H(ω)| (1)

In de grafiek zie je dat $H(0) = 0{,}125$; dat klopt, want $\frac{1}{\sqrt{8^2}} = 0{,}125$

Verder zie je het maximum $\frac{1}{\sqrt{28}} \approx 0{,}19$ voor $\omega = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

Als ω groot wordt, wordt $H(\omega)$ erg klein; $\lim_{\omega\to\infty} H(\omega) = 0$

Dit betekent dat hoge frequenties slecht doorgelaten worden door het systeem.

We bepalen nu het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 4\cos(2t + 1)$

$H(2) = \frac{1}{4+4j} \Rightarrow |H(2)| = \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}177$

$\arg(H(2)) = -\frac{1}{4}\pi \approx -0{,}79$

Gedwongen deel: $v_{part}(t) = 0{,}71\cos(2t + 0{,}21)$, want $4 * 0{,}177 = 0{,}71$ en $1 - 0{,}79 = 0{,}21$

En ten slotte de natuurlijke responsie.
De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$ heeft oplossingen $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{7}$

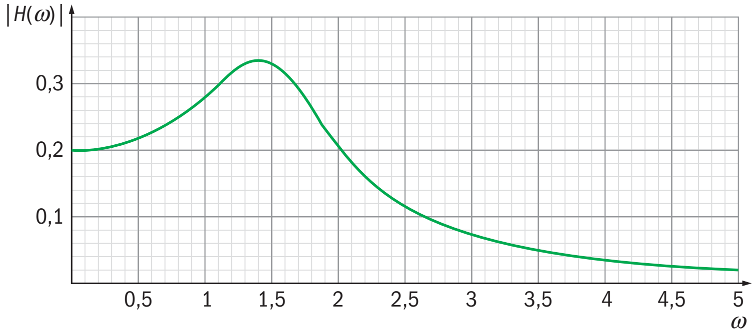
De natuurlijke responsie is dan $v_{hom} = e^{-t}\{A\cos(t\sqrt{7}) + B\sin(t\sqrt{7})\}$

2 $2v'' - 2v' + 5v = u$

$H(\omega) = \frac{1}{5 - 2\omega^2 - 2j\omega} \Rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(5-2\omega^2)^2 + (-2\omega)^2}}$

Stel $\omega^2 = x$, dan staat er onder het wortelteken:
$(5 - 2x)^2 + 4x = 4x^2 - 16x + 25 = 4(x - 2)^2 + 9$
Deze uitdrukking heeft *minimum* 9 voor $x = 2$
Dan is $|H(\omega)|$ *maximaal* $\frac{1}{3}$ voor $\omega = \sqrt{2}$ (ga na!)
De grafiek van $|H(\omega)|$ is te zien in figuur 1.16.

FIGUUR 1.16 Grafiek van $|H(\omega)|$ (2)



In de grafiek zie je dat $H(0) = 0{,}2$; dat klopt, want $\frac{1}{\sqrt{5^2}} = 0{,}2$
Verder zie je het maximum $\frac{1}{3}$ voor $\omega = \sqrt{2}$
Als ω groot wordt, wordt $H(\omega)$ erg klein; dit volgt uit het feit dat $\lim_{\omega\to\infty} H(\omega) = 0$

Dit betekent dat hoge frequenties slecht doorgelaten worden door het systeem.

We bepalen nu het gedwongen deel van de responsie op
$u(t) = 2\cos(4t - 1)$
$H(4) = \frac{1}{-27-8j} \Rightarrow |H(4)| = \frac{1}{\sqrt{27^2+8^2}} = \frac{1}{\sqrt{793}} = 0{,}0355$
$\arg(H(4)) = -\{\arctan(\frac{8}{27}) - \pi\} = \pi - 0{,}288 = 2{,}85$

($-\pi$, omdat $-27 - 8j$ in het 4e kwadrant ligt; let goed op waar de accolades en de $-\pi$ staan)

Gedwongen deel: $v_{part}(t) = 0{,}071\cos(4t + 1{,}85)$

En ten slotte de natuurlijke responsie.
De karakteristieke vergelijking $2\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ heeft oplossingen
$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}j$

De natuurlijke responsie is $v_{hom} = e^{0,5t}\{A\cos(1{,}5t) + B\sin(1{,}5t)\}$

OPGAVEN

1.22 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' + v' + v = u$
- **a** Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
- **b** Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$
- **c** Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 5\cos(3t + 4)$

1.23 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' - 3v' + 5v = u$
- **a** Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
- **b** Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$
- **c** Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 8\cos(2t + 1)$

1.24 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' + 2v' + 6v = u$
- **a** Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
- **b** Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$
- **c** Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 5\cos(3t + 2)$

1.25 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' + 4v' + 3v = u$
- **a** Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
- **b** Laat zien dat $|H(\omega)|$ geen minimum of maximum heeft.
- **c** Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 3\cos(2t)$

1.26 Gegeven het lineaire systeem met DV $2v'' - 2v' + 5v = u$
- **a** Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
- **b** Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$
- **c** Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 2\cos(4t - 1)$

1.27 Gegeven het lineaire systeem met DV $4v'' - 2v' + 3v = u$
- **a** Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
- **b** Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$
- **c** Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 5\cos(2t - 1)$

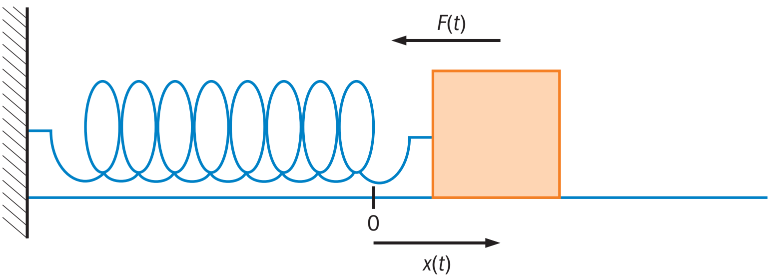
1.5.4 Toepassingen: mechanische en elektromagnetische trillingen

1 Massa-veersysteem (harmonische beweging)

Een puntmassa m beweegt als gevolg van een op de puntmassa werkende kracht (bijvoorbeeld van een veer) wrijvingsloos heen en weer over de x-as. De evenwichtsstand bevindt zich in O; de uitwijking $x(t)$ is daar nul. De op de puntmassa werkende kracht F is evenredig met de afstand $|x|$ tot O, maar tegengesteld gericht aan x: bij een uitwijking naar rechts werkt de kracht naar links en bij een uitwijking naar links werkt de kracht naar rechts – dus altijd richting O.

Wat is het verband tussen t en x? Of anders gezegd: bepaal $x(t)$, waarbij een uitwijking naar rechts als positief geldt en een uitwijking naar links als negatief.

FIGUUR 1.17 Massa-veersysteem (harmonische beweging)



Vanwege de evenredigheid en de tegengestelde richting van kracht en uitwijking geldt:

$$F = -c \cdot x(t)$$

Volgens de wet van Newton geldt ook:

$$F = m \cdot a(t) = m \cdot x''(t)$$

Dus $\quad m \cdot x''(t) = -c \cdot x(t)$

Met $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ is de algemene oplossing van deze DV:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Dit is ook te schrijven als een wisselsignaal $u(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$ met

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ en $\tan(\varphi) = -\frac{B}{A}$

2 Gedempte trilling

De situatie komt overeen met die in voorgaande toepassing, maar met dit verschil: nu treedt wel wrijving op.

Een puntmassa P met grootte m beweegt als gevolg van een op P werkende kracht F_1 heen en weer over de x-as. De evenwichtsstand bevindt zich in O, de uitwijking $x(t)$ is dan nul.
De op de puntmassa werkende kracht F_1 is evenredig met de afstand $|x|$ tot O, maar tegengesteld gericht: bij een uitwijking naar rechts werkt de kracht naar links en bij een uitwijking naar links werkt de kracht naar rechts – dus altijd richting O.
Op de massa werkt nu bovendien een wrijvingskracht F_2, die evenredig is met en tegengesteld gericht aan de snelheid van de puntmassa.

Bepaal $x(t)$.

Volgens de wet van Newton geldt hier nu:

$$ma = F_1 + F_2$$

Dus $\quad m \cdot x''(t) = -c \cdot x(t) - \mu \cdot x'(t)$

Oftewel: $m \cdot x''(t) + \mu \cdot x'(t) + c \cdot x(t) = 0$

Hierin is $c > 0$ de evenredigheidsconstante van de veer en $\mu > 0$ de wrijvingscoëfficiënt.
De DV is lineair en van de 2^e^ orde met constante coëfficiënten.
We lossen deze homogene DV op, zoals in paragraaf 1.5.1 is aangegeven.

De bijbehorende karakteristieke vergelijking is:

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + c = 0$$

Afhankelijk van de waarde van de discriminant van de karakteristieke vergelijking, $D = \sqrt{\mu^2 - 4mc}$, zijn er nu drie mogelijkheden:

a Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mc}}{2m}$ en $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mc}}{2m}$

$x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ met willekeurige reële A en B

b Als $D = 0$, dan is er één oplossing $\lambda = \frac{-\mu}{2m}$

$x(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$ met willekeurige reële A en B

c Als $D < 0$, dan volgen via de complexe oplossingen de reële oplossingen (zie paragraaf 1.5.1)

$x(t) = e^{\alpha t}\{A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)\}$ met willekeurige reële A en B

Hierin is $\alpha = \frac{-\mu}{2m}$ en $\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2m}$

(respectievelijk reëel deel en imaginair deel van de complexe oplossingen)

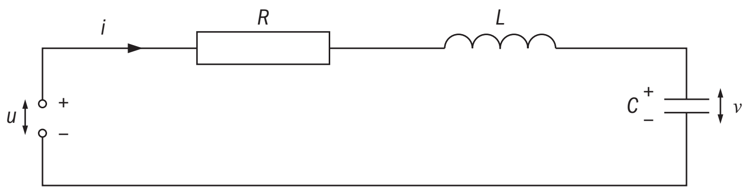
Ook hier is het resultaat te schrijven als een wisselsignaal:

$x(t) = Ce^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ met $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ en $\tan(\varphi) = -\frac{B}{A}$

3 RLC-keten

Een weerstand met weerstandswaarde R, een spoel met zelfinductie L en een condensator met capaciteit C zijn in serie geschakeld en aangesloten op een spanningsbron met spanning $u(t)$.
De input is de ingangsspanning $u(t)$, de output of de responsie op $u(t)$ is de spanning $v(t)$ over de condensator.

FIGUUR 1.18 RLC-keten



Uit de elektriciteitsleer weten we dat voor de spanningsverliezen over respectievelijk de weerstand, de spoel en de condensator geldt:

$u_R = Ri$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$u_C = v$

Daarmee geldt: $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + v = u$

Verder is bekend: $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

En dan volgt: $L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + v = u$ (1)

We gaan nu nog Q uitdrukken in v.

Omdat $C = \frac{Q}{v}$ volgens de definitie van capaciteit, geldt $Q = Cv$ en dus

$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ en $\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = C\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$, want C is constant.

Ingevuld bij (1) levert dit uiteindelijk

$$LC\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = u \quad (2)$$

Deze DV kan op dezelfde manier opgelost worden als die van de gedempte trilling.

Herhalingsopgaven

1

1.1 Geef de orde en de graad van de volgende DV's.

a $(y''')^2 + (y'')^4 = 2y$ **b** $y''' - (y'')^3 + 4y' = t \cdot y$

1.2 Gegeven de DV: $y' - 3y = 6$

a Laat zien dat $y = -2$ een (particuliere) oplossing is van deze DV.

b Laat zien dat elke functie van de vorm $y = -2 + c \cdot e^{3t}$ oplossing is.

1.3 Gegeven de DV: $y'' - 4y = 0$

a Laat zien dat $y = e^{2t}$ een (particuliere) oplossing is van deze DV.

b Laat zien dat elke functie van de vorm $y = a \cdot e^{2t}$ oplossing is.

c Laat zien dat ook elke functie van de vorm $y = b \cdot e^{-2t}$ oplossing is.

d Laat zien dat elke functie van de vorm $y = a \cdot e^{2t} + b \cdot e^{-2t}$ oplossing is.

1.4 Gegeven de DV: $y'' + 2y = 0$.

a Laat zien dat $y = \sin(t \cdot \sqrt{2})$ oplossing is van deze DV.

b Laat zien dat elke functie van de vorm $y = a \cdot \sin(t \cdot \sqrt{2})$ oplossing is.

c Laat zien dat ook elke functie van de vorm $y = b \cdot \cos(t \cdot \sqrt{2})$ oplossing is.

d Laat zien dat elke functie van de vorm $y = a \cdot \sin(t \cdot \sqrt{2}) + b \cdot \cos(t \cdot \sqrt{2})$ oplossing is.

1.5 Laat zien dat bij *opwarming* van een voorwerp de constante α in de DV

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_{omg})$$

behorend bij de 'afkoelingswet' van Newton ook *negatief* is.

1.6 Los de volgende DV's op – als dat mogelijk is – door het scheiden van variabelen.

a $\frac{dy}{dx} = xy^2$

b $\frac{dy}{dx} = x + y^2$

c $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$

d $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y}$

e $\frac{dy}{dx} = x - xy$

f $\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{y}$

1.7 Gegeven de algemene oplossing $y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t)$ met randvoorwaarden $y(\pi) = 3$ en $y(-\frac{1}{2}\pi) = 2$.
Bereken A en B.

1.8 Gegeven de algemene oplossing $y(t) = A \cdot \sin(\pi t) + B \cdot \cos(\pi t)$

a Bereken A en B bij randvoorwaarden $y(\frac{1}{3}) = -3$ en $y(\frac{3}{4}) = 4$.

b Bereken A en B bij randvoorwaarden $y(\frac{2}{3}) = 2$ en $y'(-\frac{1}{3}) = 3\pi$.

1.9 Teken het richtingsveld dat hoort bij de volgende DV's.
Neem $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 2$

a $y' = \frac{1}{y}$ **b** $y' = xy$ **c** $y' = x - y$

1.10 Los op met een integrerende factor:
a $y' + 6y = 3$
b $y' - 2y = 4e^t$
c $y' + 2y = 4t$
d $y' + 4y = 6$
e $y' + y = \cos(t)$
f $y' - y = e^{2t}$

1.11 Los op met een integrerende factor:
a $y' - ty = t$
b $ty' + y = 2t$
c $y' + y \cdot \sin(t) = \sin(t)$
d $y' \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t) = e^t$

1.12 Bepaal de *algemene* oplossing van de volgende DV's door eerst de *homogene* DV op te lossen en vervolgens een *particuliere* oplossing te bepalen.
a $y' + 3y = 6$
b $y' - 3y = 4t$
c $y' + 2y = \cos(t)$
d $y' + ty = 4t$
e $y' - 2y \cdot \sin(t) = \sin(t)$
f $y' - 6y = 3e^t + 2$
g $y' + 3y = 4x^2 - 9x + 1$
h $y' - y = 3\sin(t) + e^t - 2$

1.13 Los op:
a $y'' + 6y' + 9y = 0$
b $y'' + 8y' + 25y = 0$
c $y'' - 6y' + 8y = 0$
d $y'' - 10y' + 41y = 0$
e $y'' + 4y = 0$
f $y'' - 3y' + y = 0$
g $y'' - 4y' + 4y = 0$
h $y'' + 2y' + 4y = 0$

1.14 Bepaal een particuliere oplossing van de DV en controleer die oplossing:
a $y'' - 2y' + 5y = 3e^t$
b $y'' + 3y' - y = 4e^{-2t}$
c $y'' - 4y' - 2y = e^{2t}$
d $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3t}$
e $y'' - y = 2e^{3t}$
f $y'' + 2y' - 6y = e^{4t}$
g $y'' - 2y' + y = 4e^t$
h $y'' + 3y' - 4y = 2e^{-4t}$

1.15 Bepaal een particuliere oplossing.
a $y'' + 2y' - y = \cos(3t) + 2\sin(3t)$
b $y'' + y' + 2y = \cos(t) - \sin(t)$
c $y'' + 3y = 4\cos(2t) - 2\sin(2t)$
d $y'' - 2y' + 3y = 4\cos(t) + 2\sin(t)$
e $y'' - 3y = \sin(2t) + 2\cos(t)$

1.16 Bepaal een particuliere oplossing.
a $y'' - 3y' + 4y = 2t - 4$
b $y'' + 2y' - y = -t^2 + 3t - 2$
c $y'' - y' = t^3 + 3t^2 - 6$
d $y'' + 3y = 4t^3 - 4t + 1$

1.17 Bepaal een particuliere oplossing en vervolgens de algemene oplossing van:
a $y'' + y' - 2y = te^{2t}$
b $y'' + 2y' + y = t^3e^t$
c $y'' - 2y' - 3y = \frac{\cos(t)}{e^t}$
d $y'' + 5y' + 6y = \sin(t)e^{3t}$
e $y'' + 4y = te^{-2t}$
f $y'' - y' = t + \cos(t)e^t$

1.18 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' + 4v' + 10v = u$
a Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.
b Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$
c Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 3\cos(5t + 4)$

1.19 Gegeven het lineaire systeem met DV $2v'' - 4v' + 5v = u$

a Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.

b Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$

c Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 6\cos(4t - 1)$

1.20 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' + 2v' + 5v = u$

a Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.

b Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$

c Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 4\cos(2t + 1)$

1.21 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' - 2v' + 4v = u$

a Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.

b Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$

c Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 3\cos(t + 2)$

1.22 Gegeven het lineaire systeem met DV $v'' + 2v' + 3v = u$

a Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.

b Bepaal het minimum of maximum van $|H(\omega)|$

c Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u(t) = 5\cos(2t + 3)$