F. Huisman

L. de Wit

Beter beslissen 1

Kwantitatieve methoden in de praktijk

Noordhoff Uitgevers

Beter beslissen deel 1

Beter beslissen deel 1

Freek Huisman

Leo de Wit

Noordhoff Uitgevers Groningen

Ontwerp omslag: G2K Designers Groningen
Omslagillustratie: Photo Disc

Noordhoff Uitgevers bv voert voor het hoger onderwijs de imprints Noordhoff Uitgevers, Stenfert Kroese, Martinus Nijhoff en Vespucci.

0 1 2 3 4 5 / 08 07 06 05 04

ISBN (ebook) 978-90-01-85682-3
ISBN 978-90-01-40897-8
NUR 123

Woord vooraf

Dit boek gaat over het nemen van beslissingen. In een mensenleven beslissen we heel wat af. Meestal hoeven we daar niet ingewikkeld over te doen. Het is fijn dat we wat te kiezen hebben en met wat gezond verstand hakken we heel wat knopen succesvol door. Maar we kunnen niet altijd zo te werk gaan. Soms moet een individu of organisatie beslissingen nemen waarmee grote belangen gemoeid zijn. Vaak gaat het dan om complexe problemen waarbij de effecten van ons handelen op onze omgeving – op mensen, op organisaties, op ecosystemen, op machines enzovoort – niet bij voorbaat duidelijk zijn. Met gezond verstand alleen komen we er dan niet meer. We moeten ons dan inspannen om te bedenken welke handelingen we het best kunt verrichten om ons doel te bereiken. We moeten inventariseren welke handelwijzen mogelijk zijn en vervolgens op één of andere manier voorspellen wat de gevolgen van de verschillende handelwijzen zullen zijn. Zulke voorspellingen moeten redelijk gedetailleerd zijn om van nut te zijn. Een uitspraak als 'Wanneer ons bedrijf meer produceert, verdienen we meer' is veel te kort door de bocht; het is noodzakelijk in te schatten hoevéél meer producten tegen welke kosten geproduceerd kunnen worden, hoeveel van deze extra producten verkocht kunnen worden en wat dit bijdraagt aan de nettowinst van het bedrijf. Om tot de best mogelijke voorspellingen en inschattingen te komen kan in veel situaties (mede) gebruik gemaakt worden van kwantitatieve – dus getalsmatige – analyses.

Om tot getalsmatige voorspellingen te komen wordt de werkelijkheid beschreven met formules en vergelijkingen. De kracht van zo'n numerieke aanpak is dat resultaten gevonden kunnen worden die objectief, controleerbaar en exact zijn. Kwantitatieve resultaten zijn gemakkelijker te interpreteren en te gebruiken dan kwalitatieve bevindingen. De keerzijde van de medaille is natuurlijk dat berekeningen kunnen leiden tot volstrekt onrealistische uitkomsten indien vergelijkingen en modellen niet met de grootste zorg geformuleerd worden. Het vereist enige ervaring en deskundigheid om de nauwkeurigheid en betrouwbaarheid van een berekend resultaat in te schatten. Het is doorgaans een heel werk om voor een nieuwe situatie een bruikbaar wiskundig model te bouwen. In de loop der tijd is een aantal succesvolle methoden ontwikkeld die hun nut in de praktijk bewezen hebben. Een aantal van deze methoden komen in dit boek aan bod.

In hoofdstuk 1 'Beperkingen kenmerken de meester' komt lineair programmeren aan bod. Het gaat hier om optimaliseringsvraagstukken, waarbij een bepaalde grootheid zo groot mogelijk (bijvoorbeeld winst) of juist zo laag mogelijk (bijvoorbeeld kosten) gemaakt moet worden. Karakteristiek is dat er allerlei restricties of beperkende voorwaarden zijn waaraan voldaan moet worden. Indien doel en restricties als lineaire formules geformuleerd kunnen worden, zijn er diverse algemene oplossingsmethodes beschikbaar. Deze methodes worden uitgelegd en

toegepast. Omdat we de nadruk leggen op realistische – en dus niet al te simpele – problemen, is hiernaast een computerpakket om oplossingen te genereren onmisbaar. In dit boek gebruiken we hiervoor de 'Oplosser' die standaard bij de meeste spreadsheets wordt bijgeleverd.
Lineair programmeren is een zeer veelzijdige techniek die in veel uiteenlopende vraagstellingen kan worden toegepast. Om dit te illustreren is een uitgebreide (maar lang niet volledige) reeks van toepassingen beschreven. Naast het vinden van de optimale situatie is er ook veel aandacht voor *what-if* vraagstukken. Hoe verandert de optimale oplossing indien één of meer van de startgegevens wijzigt? De hierbij benodigde gevoeligheidsanalyse wordt zowel handmatig als met de 'Oplosser' toegepast.

In hoofdstuk 2 'Tijden veranderen' worden toepassingen van dynamische modellen besproken. Het gaat hier om vraagstukken waarin wiskundige relaties gebruikt worden om veranderingen in een systeem te beschrijven. Dit hoofdstuk behandelt diverse algemeen bruikbare methoden en werkwijzen, die allemaal in praktijkgerichte contexten worden uitgelegd en toegepast. Het werken met modellen kent vele facetten en we streven beslist geen volledigheid in vakgebieden als modelbouw of systeemtheorie na. Om aan de grote diversiteit aan vraagstukken en complexiteit van de werkelijkheid het hoofd te bieden is een systematische aanpak onmisbaar. Daarom staat in dit hoofdstuk het gebruik van de modelcyclus centraal. Ieder vraagstuk begint met een analyse van het probleem. Dan worden modelvergelijkingen opgesteld die de veranderingen in de loop van de tijd beschrijven. Deze modelvergelijkingen (afhankelijk van de situatie recursierelaties of differentiaalvergelijkingen) worden in een spreadsheet opgelost. Vervolgens wordt gecontroleerd of de modelvergelijkingen voorspellingen leveren die de werkelijkheid voldoende dicht benaderen. Als het model aldus gevalideerd is, wordt het gebruikt bij het oplossen van de oorspronkelijke vraagstelling. In dit hoofdstuk worden twee problemen op deze manier volledig uitgewerkt. Tot slot komen in een reeks vraagstukken nog een aantal nieuwe modellen aan bod die ook weer volgens de modelcyclus gebouwd en gebruikt worden.

In hoofdstuk 3 'Wachten duurt lang' komen wachttijdproblemen aan bod. Wanneer een dienst wordt aangeboden waar meer klanten op af komen, is het niet altijd mogelijk alle klanten direct te helpen. Er zijn nu eenmaal grenzen aan de beschikbare bedieningscapaciteit en het resultaat kan zijn dat sommige klanten moeten wachten voordat ze geholpen worden. In dit hoofdstuk komt een aantal veel voorkomende typen van wachttijdsystemen aan bod. In de behandelde vraagstukken worden zowel het aantal bedieningspunten, de grootte van de wachtruimte en de grootte van de klantenpopulatie gevarieerd. Voor al deze situaties wordt getoond hoe karakteristieken als verwachte wachttijd voor een klant en de verwachte wachtrijlengte berekend kunnen worden.
Bij het bepalen van deze karakteristieken worden twee verschillende benaderingen gebruikt. Enerzijds worden simulaties gebruikt om het wachttijdsysteem na te bootsen. Hierbij wordt per individuele klant de aankomsttijd, bedieningsduur, wachttijd enzovoort berekend. Door deze grootheden voor een (groot) aantal klanten te middelen ontstaan

schattingen die in de praktijk gebruikt kunnen worden. Voor een aantal typen wachttijdsystemen kunnen deze simulaties redelijk eenvoudig in een spreadsheet geprogrammeerd worden.
Een andere aanpak is om het wachttijdsysteem te beschrijven met behulp van wiskundige vergelijkingen. Met behulp van (statistische) informatie over de variatie aan aankomst- en bedieningstijden kunnen de kansen op verschillende klantenaantallen en wachtrijlengtes berekend worden. Hieruit volgen daarna formules om verwachte wachttijd en andere karakteristieken uit te rekenen.

Het team van redacteuren en auteurs heeft zijn best gedaan om het aantal fouten in de uiteindelijke tekst zo klein mogelijk te maken. Niettemin zullen ongetwijfeld toch nog fouten of onduidelijkheden resteren. Wij bieden de lezer hiervoor bij voorbaat onze verontschuldigingen aan. Tegelijkertijd verzoeken we u deze gebreken, of andersoortig commentaar, te mailen naar info@wolters.nl

Freek Huisman en Leo de Wit
Vlissingen, februari 2004

Inhoud

Studiewijzer

Doelgroep
Dit boek is bedoeld voor studenten – uit het hoger onderwijs of uit de beroepspraktijk – die kennis willen nemen van praktische toepassingen van enkele veel voorkomende kwantitatieve methoden. Om dit boek succesvol door te kunnen werken is enige voorkennis van een aantal onderwerpen nodig. We gaan ervan uit dat de lezer om kan gaan met een spreadsheet. Verder moet in dit boek natuurlijk veel met formules gewerkt worden. Het is dus belangrijk dat de lezer enige ervaring heeft in het interpreteren, herschrijven en oplossen van formules en vergelijkingen. De hoeveelheid en het niveau van de gebruikte wiskunde varieert per hoofdstuk en per gekozen toepassing. Tot slot wordt bij een aantal onderwerpen ook kennis van de basisbegrippen uit de statistiek verondersteld. Afhankelijk van het studietraject kan een deel van deze voorkennis eventueel gelijktijdig met het doorwerken van dit boek in een aparte cursus worden aangeleerd.

Leerdoelen
Centraal in dit boek staat de interactie tussen theorie en praktijk. Te vaak wordt nog gedacht dat de werkelijkheid van alledag zo ingewikkeld is dat praktijkervaring de ultieme basis is waarop beslissingen genomen kunnen worden. Maar praktijkervaring wordt pas bruikbaar als leerervaringen uit situatie A toegepast kan worden in een andere situatie B. Om deze transfer mogelijk te maken is een theoretisch raamwerk van kennis nodig. Dit inzicht wordt vaak verwoord met de beroemde one-liner van Kurt Lewin: 'Niets is zo praktisch als een goede theorie'.
De leerdoelen waar het in dit boek om draait zijn dus tweeledig. Enerzijds moeten de rekenkundige en logische aspecten van de gebruikte kwantitatieve methoden aangeleerd worden. Anderzijds moet geleerd worden welke technieken in welke situatie toegepast kunnen worden: hoe kunnen numerieke uitkomsten vertaald worden naar zinvolle resultaten, en hoe kunnen relevante aspecten van de beroepspraktijk opgenomen worden in het kwantitatieve model?

Op basis van deze filosofie is een aantal globale leerdoelen te formuleren. Voor de duidelijkheid zullen we er een aantal specificeren. De student moet leren:
- voor een gegeven praktijksituatie het juiste model te formuleren;
- aanpassingen in een model te maken bij veranderende omstandigheden;
- verbanden leggen tussen rekenkundige resultaten en praktijkgebeurtenissen;
- uitkomsten van rekenmodellen te interpreteren en vertalen naar de praktijk;
- consequent een systematische en planmatige aanpak te kiezen;
- rekenkundige aspecten van een wiskundig model correct uit te voeren;
- uiteenlopende *what-if* analyses uit te voeren.

Voor de gebruikers van dit boek zal het doorgaans gewenst zijn om de leerdoelen nog wat verder aan te scherpen, bijvoorbeeld door een specifieke context aan te geven of door specifieke prestaties te eisen.

Gebruik van het boek

Deze tekst is niet bedoeld als leesboek maar als werkboek. De lezer wordt uitgenodigd mee te doen door de beschreven voorbeelden zelf na te rekenen. Hiervoor zijn uitvoerige beschrijvingen van rekenwijzen en spreadsheetwerkbladen in het boek opgenomen. Verder wordt de theoretische uitleg afgewisseld met oefeningen waarmee de lezer kan controleren of hij of zij met de behandelde stof uit de voeten kan. Het zelf maken van deze oefeningen is ten sterkste aanbevolen; voor de volledigheid zijn de uitwerkingen van alle oefeningen in het boek opgenomen. De student zal dus een aanzienlijk deel van zijn of haar studietijd al rekenend – achter een computer – moeten doorbrengen. Doorgaans zullen ook tijdens (delen van) lessen en toetsen computerhulpmiddelen gebuikt worden.

In het boek worden de besproken kwantitatieve methoden in veel verschillende contexten toegepast. In alle voorbeelden en ook in alle opgaven wordt een specifieke praktijksituatie beschreven. Door deze grote diversiteit aan situaties is het extra belangrijk een goed inzicht te hebben in het gebruik van de betreffende oplostechniek. Als ondersteuning hierbij wordt veelvuldig gebruik gemaakt van vaste schema's of stappenplannen. In ieder hoofdstuk wordt zo'n systematiek keer op keer herhaald. Bij het aanpakken van nieuwe vraagstukken is het dus handig en nuttig om steeds te bedenken hoe de systematiek in die specifieke situatie eruitziet.

Structuur van het boek

Alle hoofdstukken in dit boek beschrijven een groot aantal toepassingen. Het boek is zo opgezet dat het mogelijk is sommige delen over te slaan. In hoofdstuk 1 bijvoorbeeld kan na afronding van paragraaf 1.2 een selectie gemaakt worden uit de onderwerpen van de paragrafen 1.3, 1.4 en 1.5. In hoofdstuk 2 kan de lezer ervoor kiezen om óf paragrafen 2.2 en 2.3 door te werken, of in plaats hiervan paragrafen 2.4 en 2.5 door te nemen. Ook uit paragraaf 2.6 kan een vrije selectie gemaakt worden. In hoofdstuk 3 ten slotte zouden een aantal van de paragrafen 3.5.3, 3.7, 3.8 of 3.9 achterwege gelaten kunnen worden. Het is natuurlijk aan de lezer om te beslissen welke onderwerpen voor hem of haar het meest relevant zijn.

Het boek wordt afgesloten met enkele bijlagen. De bijlagen 1, 2 en 3 bevatten informatie over het gebruik van spreadsheets en computeralgebrasystemen als hulpmiddel bij het uitvoeren van berekeningen. De twee andere bijlage, de Simplexmethode (A) en De frisdrankfabriek (B) bevatten verdere achtergronden en oplostechnieken van het lineair programmeren en zijn uitsluitend op de website
www.wolters.nl/beterbeslissen beschikbaar.
Tot slot bevat *Beter beslissen* een formuleblad waarop de essentiële concepten en formules per hoofdstuk zijn samengevat. Het formuleblad is ook digitaal beschikbaar op de website van dit boek.

Internetsite

Bij *Beter beslissen* is een internetsite gemaakt die extra materiaal bij het boek bevat. Deze site bevat ook de uitwerkingen van de opgaven. Kijk voor dit extra materiaal op www.wolters.nl/beterbeslissen

Beperkingen kenmerken de meester

1

OPENINGSCASUS

Langzaam loopt Jacomien Bolmikolke terug naar haar kamer. Ze heeft zojuist van haar bedrijfsmentor opdracht gekregen om naar een planningprobleem te kijken dat elk kwartaal opnieuw moet worden opgelost. Jacomien werkt als stagiaire bij de Hollandse Elektronica Fabriek (HEF), een onderneming die onder meer elektronische componenten voor een vliegtuigfabriek maakt. Elke kwartaal ontvangt de HEF een order van de vliegtuigfabriek, en op basis hiervan moet er een driemaandsplanning worden opgesteld. In die planning wordt voor iedere maand vastgelegd hoeveel van welke producten er gaat worden geproduceerd. Er komt nogal wat kijken bij het opstellen van zo'n planning. Jacomien heeft gelukkig aantekeningen gemaakt. Ze moet in ieder geval rekening houden met de beperkte capaciteit die nog beschikbaar is op de HEF-productielijnen. Verder zijn er iedere maand ook maar een beperkt aantal mensen beschikbaar om aan de order te werken. En tot slot moet ze er ook nog rekening mee houden dat, als er in een maand een overschot aan componenten wordt gemaakt, er wel voldoende ruimte in het magazijn moet zijn om deze op te slaan. Maar wat nou precies de productiekosten en de kosten om onderdelen op voorraad te houden zijn, dat weet haar mentor zo gauw ook niet. Dat moet ze dus ook nog ergens navragen. Haar bedrijfsmentor wil volgende week graag horen hoeveel van welke producten er per maand moet worden geproduceerd, zodanig dat de order volledig kan worden vervuld, terwijl de totale kosten van productie en opslag zo laag mogelijk blijven. Jacomien zit er een beetje mee. Haar bedrijfsmentor

mompelde iets over lineaire modellen, of lineaire programmering of zoiets. In haar opleiding had ze kennisgemaakt met productieplanning en met transport- en routeproblemen. Ze moet nog maar eens goed nadenken hoe ze dit planningprobleem kan aanpakken.

Voorgaande schets van een planningprobleem is een voorbeeld van het soort problemen dat in dit hoofdstuk wordt besproken. De problemen die hier worden geformuleerd, gemodelleerd en opgelost, liggen op het gebied van productieplanning, techniek, marketing, vervoer en logistiek.

Iedere keer moet een klus zo goed mogelijk worden geklaard. Dat kan op verschillende manieren. Voordat we aan de slag kunnen, moeten er beslissingen worden genomen van het type: 'Hoeveel van welke taken voeren we in een bepaalde periode uit?'. Om de juiste beslissing te kunnen nemen, moet helder zijn welk doel wordt nagestreefd. Een doel kan zijn om winst of kwaliteit te maximaliseren, of om kosten te minimaliseren. Verder is er altijd een aantal harde voorwaarden die de keuzemogelijkheden inperken. We beschikken immers maar over eindige hoeveelheden geld, middelen en tijd. De kunst is nu om binnen die beperkte mogelijkheden steeds de optimale situatie te vinden. Hierop slaat de titel van dit hoofdstuk. Wanneer er een overdaad aan hulpbronnen beschikbaar is, kan iedereen een klus wel tot een goed einde brengen. Maar het kenmerk van de ware meester is juist, dat hij of zij ook met beperkte hulpbronnen toch goed werk kan afleveren. Een belangrijk hulpmiddel bij het nemen van goede beslissingen is een wiskundige techniek die 'lineair programmeren' heet. Deze techniek wordt in dit hoofdstuk uitgebreid behandeld.

In dit hoofdstuk komen aan bod:
- Een stappenplan, om structuur aan te brengen in de manier van formuleren en oplossen, samen met een omschrijving van de te gebruiken oplosmethode, zie paragraaf 1.1;
- Een aantal uitwerkingen van eenvoudige, maar praktische voorbeelden op het gebied van:
  - productieplanning (intuïtieve en grafische oplossing van lineaire programmering);
  - marketing: bepaling van aantal te houden enquêtes (grafische methode);
  - de mini-onderneming (computeroplossing met Excel en gevoeligheidsanalyse);
  - beleggen in aandelen en obligaties (gevoeligheidsanalyse met Excel);
  - reclame maken op radio en tv (geheeltallige lineaire programmering).

  Deze voorbeelden worden behandeld in paragraaf 1.2;
- Een aantal uitwerkingen van ingewikkelder problemen op het gebied van techniek, logistiek en economie, zie paragraaf 1.3, 1.4 en 1.5.

Tevens horen twee bijlagen bij dit hoofdstuk. In bijlage A (www.wolters.nl/beterbeslissen) wordt de theoretische achtergrond besproken van lineair programmeren, namelijk het beroemde Simplex-algoritme. In bijlage II wordt ingegaan op het zogenoemde *duale probleem* bij lineair programmeren.

1.1 Lineair programmeren en stappenplan

De oplosmethode die we in dit hoofdstuk toepassen wordt in de vakliteratuur ‘lineair programmeren’ genoemd. (Deze term stamt van vóór de tijd dat er computerprogramma’s bestonden. Het woord ‘programmeren’ slaat hier op het systematisch formuleren en oplossen van het vraagstuk.) Om deze techniek te kunnen toepassen moet het vraagstuk wel aan bepaalde voorwaarden voldoen. Een belangrijk criterium is dat de te nemen beslissingen, het nagestreefde doel en de beperkingen getalsmatig zijn te formuleren. Er moeten vervolgens wiskundige formules worden opgesteld die doel en beperkingen uitdrukken in de beslissingsvariabelen. Deze formules moeten bovendien *lineair* zijn. Dit betekent dat veranderingen in beslissingsvariabelen recht evenredig zijn met veranderingen in doel en beperkingen. Wiskundig gesproken betekent dat het volgende. Een lineaire formule heeft de vorm:

Lineair

$c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + c_3 \times x_3 + \ldots$, waar x_1, x_2, x_3,… de beslissingsvariabelen zijn, en c_1, c_2, c_3,… constante getallen zijn.
Uit de voorbeelden in de volgende paragrafen wordt duidelijk wat de standaardvorm is van een lineair-programmeringsvraagstuk.

Intuïtieve methode
Grafische methode

Er zijn verschillende oplosmethoden om een lineair programmeringsvraagstuk op te lossen. In eenvoudige situaties is het mogelijk met gezond verstand een oplossing te vinden. We noemen dit de *intuïtieve methode*. Indien er slechts twee beslissingsvariabelen zijn, is de *grafische methode* heel geschikt. De eerste vraagstukken uit de volgende paragraaf lossen we met deze methode op. Indien er meer dan twee beslissingsvariabelen zijn, moeten andere methoden worden gebruikt. De bekendste oplosmethode is de Simplex-methode. De details en achtergronden van deze methode worden in bijlage A (www.wolters.nl/beterbeslissen) besproken. Praktijkproblemen bevatten doorgaans zoveel variabelen en restricties dat een handmatige oplossing met de Simplex-methode niet meer praktisch is. Er zijn daarom allerlei software-pakketten ontwikkeld waarmee zulke vraagstukken wel kunnen worden opgelost. In dit boek maken we gebruik van Excel. Het bedrijf Frontline Systems heeft een pakket ontwikkeld dat in de huidige versies van zowel Excel, Quattro Pro als Lotus 1-2-3 is ingebouwd. Dit pakket wordt binnen Excel ‘Oplosser’ (Engels: Solver) genoemd. Het merendeel van de problemen uit dit hoofdstuk lossen we met deze Oplosser op.

Simplex-methode

Oplosser
Solver

Alle hier te behandelen voorbeelden kenmerken zich door eenzelfde aanpak om tot een oplossing te komen: in een aantal stappen gaan we van de formulering van het probleem naar de oplossing ervan. Deze stappen zijn:

Stap 1 Probleembeschrijving
De situatie moet duidelijk worden beschreven. Doel en beperkingen moeten geformuleerd worden. Alle relevante numerieke gegevens moeten aanwezig zijn.

Wiskundig model

In de stappen 2 tot en met 4 maken we aan de hand van de probleemformulering een zogenoemd *wiskundig model* van het op te lossen probleem. In de beroepspraktijk zijn dit vaak de lastigste stappen!

Beslissingsvariabelen

Doelfunctie

Beperkingen
Restricties
Constraints

Stap 2 Definieer de beslissingsvariabelen
Welke beslissingen moeten er worden genomen? Benoem de factoren die je daadwerkelijk kunt veranderen. Deze beslissingen definiëren we met behulp van zogenoemde beslissingsvariabelen (in het Engels: decision variables).

Stap 3 Druk de doelfunctie uit in de beslissingsvariabelen
Waarnaar steven we? Dit doel vertalen we naar een doelfunctie of doelstellingsfunctie (in het Engels: objective function). Essentieel is dat de doelfunctie en beslissingsvariabelen via een wiskundige (lineaire) formule met elkaar in verband worden gebracht.

Stap 4 Druk de restricties uit in de beslissingsvariabelen
Meestal hebben we bij het nastreven van de doelstelling te maken met een aantal beperkingen. Deze beperkingen zijn de randvoorwaarden, restricties, ook wel nevenvoorwaarden genoemd (in het Engels: constraints). Essentieel is ook hier weer dat alle restricties via een wiskundige (lineaire) formule met de beslissingsvariabelen in verband worden gebracht.

In de stappen 5 tot en met 7 worden oplossingen gegenereerd en geïnterpreteerd.

Stap 5 Oplossen van het wiskundig model
Meestal wordt de oplossing bepaald met behulp van een computerpakket. We moeten de eerder opgestelde formules invoeren in de computer. Zoals gezegd werken we in de meeste gevallen met de Oplosser in Excel.

Stap 6 Gevoeligheidsanalyse
In de meeste situaties zijn doelfunctie en randvoorwaarden niet met 100 procent precisie bekend. Het is dan belangrijk om na te gaan hoe gevoelig de gevonden oplossing is voor (kleine) veranderingen in de getalswaarden van de gegevens die zijn gebruikt.
Alle computerpakketten voor lineair programmeren nemen ook de berekeningen van de gevoeligheidsanalyse voor hun rekening. Ook Excel doet dat.

Stap 7 Analyse van de oplossing en eventuele modeluitbreiding
De oplossing en de gevoeligheidsanalyse leveren een hoop getallen op. Tot slot moeten we deze getallen verwerken en vertalen in termen van het oorspronkelijke probleem. Welk scenario moeten we adviseren? Deze stap wordt soms gecombineerd met stap 5 en/of 6 waar we de oplossing bespreken.

1.2 Voorbeelden van lineair programmeren

Bij alle hier te behandelen voorbeelden wordt steeds expliciet het stappenplan gebruikt zoals dat beschreven is in de voorgaande paragraaf.

1.2.1 Productieplanningprobleem (intuïtieve en grafische methode)

In dit eerste voorbeeld behandelen we eerst een intuïtieve manier van oplossen, daarna komt de zogenoemde grafische methode aan de orde. Beide methoden worden toegelicht aan de hand van een maximaliseringsprobleem.

Stap 1 Probleembeschrijving
Textielfabriek Design bv maakt twee soorten merkproducten: T-shirts met een fraai opdruk en chique overhemden. Voor de eenvoud nemen we aan dat er slechts twee soorten bewerkingen plaatsvinden: fabricage en verpakken (inclusief controle). Het verpakken (meestal in dozen van 50 stuks) van met name de overhemden is erg tijdrovend.
Aan het eind van elke week wordt er een planning gemaakt voor de week daarop. Alle relevante gegevens, onder andere met betrekking tot bijvoorbeeld de beschikbare capaciteit, zijn dan bekend of worden zo goed mogelijk geschat. Hoeveel beslag er wordt gelegd op die beschikbare capaciteit om één doos van elk product te maken, staat in tabel 1.1. Ook wordt in die tabel aangegeven hoe groot de maximaal beschikbare capaciteit is in de planningperiode van een week.

Tabel 1.1 **Capaciteitsbeslag** (in uren) **per doos product**

	T-shirts	Overhemden	Maximaal beschikbaar
Fabricage	2	1	100
Verpakken	1	2	80

Deze tabel laat zich als volgt lezen:
- één doos T-shirts vergt 2 fabricage-uren en 1 verpakuur;
- één doos overhemden vergt 1 uur voor de fabricage en 2 uur voor het verpakken;
- er is deze week maximaal 100 uur beschikbaar voor de fabricage en 80 uur voor het verpakken van de T-shirts en overhemden.

De kostencalculator in de fabriek heeft berekend dat de winstbijdrage per doos T-shirts €30 bedraagt en per doos overhemden €20. De bedrijfsleider vraagt zich nu af hoeveel dozen er de komende week moeten worden gemaakt om de totale winstbijdrage zo groot mogelijk te laten zijn.
Aan de hand van het geformuleerde stappenplan gaan we het probleem analyseren en oplossen.

Oefening 1.1
Bereken per capaciteitssoort de benodigde capaciteit om 10 dozen T-shirts en 20 dozen overhemden te maken. Hoe groot (in procenten van de beschikbare capaciteit) is dan de bezetting van elke capaciteitssoort?

Stap 2 Definiëren van de beslissingsvariabelen
Uit voorgaande probleembeschrijving is duidelijk dat er voor de komende week twee beslissingen moeten worden genomen: hoeveel dozen T-shirts gaan we maken en hoeveel dozen overhemden? We definiëren daarom de volgende twee beslissingsvariabelen:
x = aantal dozen T-shirts;
y = aantal dozen overhemden.

Stap 3 Opstellen van de doelfunctie
Als we besluiten om x dozen T-shirts te gaan maken, is de bijdrage in de winst gelijk aan 30x euro. Als we bovendien besluiten om y dozen overhemden te gaan maken, neemt de winstbijdrage nog eens met 20y euro toe. In totaal is de bijdrage aan de winst dus gelijk aan 30x + 20y. Deze bijdrage noemen we w.
Er geldt dus: w = 30x + 20y.
Het doel van de onderneming is om deze winstbijdrage elke week zo groot mogelijk te maken. Voorgaande relatie wordt *doelfunctie* genoemd, ook wel *objectfunctie* (in het Engels *objective function*). Deze doelfunctie moet worden gemaximaliseerd. We schrijven dat als volgt op:
Maximaliseer w = 30x + 20y.

Doelfunctie
Objectfunctie

Stap 4 Opstellen van de restricties
Er zijn echter beperkende voorwaarden. Deze beperkende voorwaarden gaan we ook uitdrukken in dezelfde beslissingsvariabelen x en y.
Als we x dozen T-shirts maken, hebben we 2x fabricage-uren nodig. Als we y dozen overhemden maken, komen er nog eens y fabricage-uren bij. In totaal zijn dus 2x + y fabricage-uren nodig. Omdat er de komende week slechts 100 fabricage-uren beschikbaar zijn, moet dan gelden, zie ook tabel 1.1:

$$2x + y \leq 100 \qquad \text{[voor de fabricageafdeling]}$$

Deze relatie is dus een beperkende voorwaarde met betrekking tot de beschikbare fabricagecapaciteit en wordt daarom *restrictie* genoemd. Vanwege het ≤-teken wordt zo'n relatie ook wel een 'kleiner-gelijk-restrictie' genoemd.

Restrictie

Op dezelfde manier kunnen we voor de verpakking ook zo'n beperkende voorwaarde opstellen:

$$x + 2y \leq 80 \qquad \text{[voor verpakking en controle]}$$

Aan beide restricties, namelijk die voor fabricage en voor verpakken, moet tegelijkertijd worden voldaan in de betreffende planningperiode van een week. Van de vele mogelijke combinaties van x en y die te bedenken zijn, zoeken we nu díe combinatie die de winstbijdrage w zo groot mogelijk maakt.

Wiskundig model van het planningprobleem

De stappen 2 tot en met 4 resulteren in het volgende zogenoemde *wiskundig model van het planningprobleem:*

$$
\begin{array}{llrl}
\text{Maximaliseer} & w = 30x + 20y & & \\
\text{m.b.t.} & 2x + y \le & 100 & \text{[fabricage]} \\
 & x + 2y \le & 80 & \text{[verpakken]} \\
 & x, y \ge & 0 & \text{[positiviteit]}
\end{array}
$$

Dit wiskundig model bestaat dus uit een doelfunctie die moet worden gemaximaliseerd en een tweetal restricties. Zowel de doelfunctie als de restricties zijn uitgedrukt in de beslissingsvariabelen x en y. Verder is het zo dat x en y niet negatief mogen zijn. Immers, x en y stellen aantallen voor en we kunnen geen negatief aantal producten maken. Vandaar nog de extra relatie: $x, y \ge 0$. Hier staat dat zowel x als y groter dan, of hooguit gelijk aan nul moeten zijn.

Lineaire functies

Lineair programmeringsmodel

Omdat de doelfunctie en de restricties *lineaire functies* van de variabelen x en y zijn, wordt dit wiskundig model een *lineair programmeringsmodel* genoemd, meestal afgekort tot LP-model.

We hebben een planningprobleem geformuleerd, de bijbehorende beslissingsvariabelen (hier x en y) gedefinieerd en een wiskundig model geconstrueerd. Dat wil zeggen: we hebben de stappen 1 tot en met 4 uit het stappenplan uitgevoerd. De volgende fase is het uitvoeren van stap 5 en/of 6: het oplossen van het LP-model.

Stap 5 Intuïtieve oplosmethode

Omdat de bijdrage in de winst het grootst is voor T-shirts, lijkt het aantrekkelijk om alleen T-shirts te gaan maken.

Oefening 1.2

Controleer via een berekening dat we dan 50 dozen T-shirts produceren, dat de bijdrage in de winst in dat geval €1500 bedraagt en dat we geen uren meer over hebben in de fabricage-afdeling, maar nog wel 30 uren in de inpakafdeling.

We zouden echter ook kunnen besluiten om alleen overhemden te maken. We kunnen dan maximaal 40 dozen maken, want dan zijn er geen verpakkingsuren meer over. De winstbijdrage is in dat geval $40 \times €20 = €800$. Dat is minder (aanmerkelijk minder zelfs) dan bij het maken van alleen T-shirts.
We kiezen dus voor het maken van 50 dozen T-shirts, want dat levert het meeste op. Bij deze beslissing is de afdeling Fabricage dus voor 100% bezet, maar op de inpakafdeling is nog 30 uur over van de beschikbare 80 uur. De bezetting van deze afdeling is dus 62,5%.

Veronderstel nu eens dat we toch één doos overhemden willen maken. Dat vergt dan één uur in de fabricage, maar in die fabricage-afdeling is geen ruimte meer. We moeten dus wat minder T-shirts gaan maken om toch die ene doos overhemden te kunnen fabriceren. Dat kan door een halve doos T-shirts minder te maken. We houden dan één uur over en dat uur kunnen we gebruiken om die ene doos overhemden te maken. Daarmee krijgen we ook de helft van €30, dus €15 aan opbrengst minder. Maar we krijgen er de opbrengst van één doos overhemden voor terug, ofwel €20. Zo'n ruil levert dus uiteindelijk vijf euro aan opbrengst extra op en is dus aantrekkelijk. De extra opbrengst die we krijgen als we één doos overhemden gaan maken (tegen inlevering van een halve doos T-shirts) noemen we de *gereduceerde opbrengst*.

Gereduceerde opbrengst

Een halve doos T-shirts ruilen voor een doos overhemden heeft natuurlijk ook consequenties voor de bezetting van de verpakkingsafdeling.

Oefening 1.3
Bereken dat we bij zo'n ruil 1,5 uur extra nodig hebben voor de verpakking.

We hebben nog 30 inpakuren over, dus kunnen we zo'n ruil $30/1\frac{1}{2} = 20$ keer doen. Dat betekent dat we 20 keer een halve doos T-shirts (dus 10 dozen T-shirts) inruilen. Daarvoor in de plaats maken we 20 dozen overhemden.
Het programma voor de volgende week wordt dus:
Maak 40 (namelijk 50 – 10) dozen T-shirts, en maak 20 dozen overhemden. De totale winstbijdrage wordt dan: $w = 40 \times €30 + 20 \times €20 = €1.600$.
Later blijkt dat deze intuïtieve oplossing ook de optimale oplossing is.

Opmerking
In de praktijk van alledag vinden we natuurlijk niet altijd zo'n mooie geheeltallige oplossing zoals in dit planningvoorbeeld. De getallen in dit voorbeeld zijn expres zodanig gekozen dat er een 'mooie' oplossing uitkomt, omdat we 'met de hand' rekenen, dus zonder computer.

Grafische methode

Omdat intuïtie niet altijd tot optimale resultaten leidt, bespreken we ook nog de zogenoemde *grafische methode* om LP-problemen op te lossen. Deze methode is bruikbaar zolang het model niet meer dan twee beslissingsvariabelen heeft.
We voeren stap 5 uit het stappenplan dus nogmaals uit, maar nu met een andere methode van oplossen.

Stap 5 Grafische methode
We geven nog eens het wiskundig model dat we al eerder in stap 4 hebben gemaakt:

Maximaliseer $w = 30x + 20y$

$$
\begin{array}{llll}
\text{m.b.t.} & 2x + y & \leq 100 & \text{[fabricage]} \\
 & x + 2y & \leq 80 & \text{[verpakken]} \\
 & x,y & \geq 0 & \text{[positiviteit]}
\end{array}
$$

Eerst gaan we een paar waarden voor de variabelen x en y invullen, om een beetje gevoel te krijgen voor wat wel en niet mogelijk is.
- Kies $x = 0$ en $y = 0$. We produceren dan niets en de bijdrage aan de winst is dus nul.
- Kies $x = 25$ en $y = 25$. De fabricagerestrictie geeft: $2 \times 25 + 25 \leq 100$. Aan deze restrictie wordt dus voldaan. De verpakkingsrestrictie

Toelaatbare oplossing

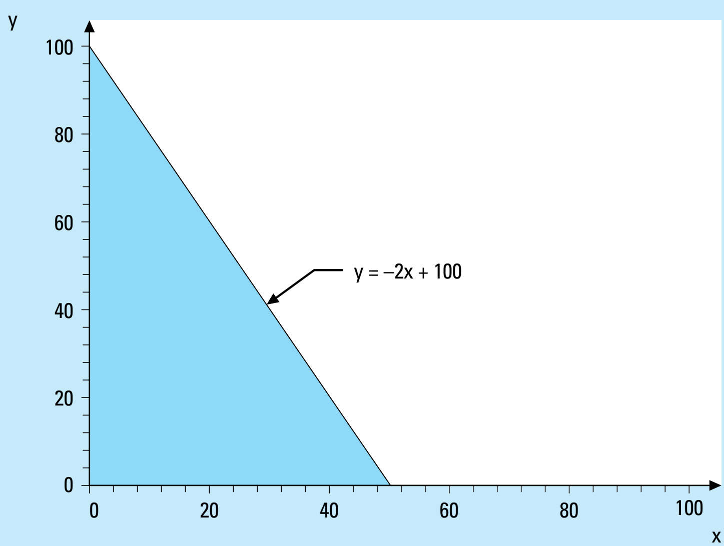
geeft: $25 + 2 \times 25 \leq 80$. Ook dit is juist. Zo'n productieprogramma voldoet dus aan beide restricties en wordt daarom een *toelaatbare oplossing* genoemd. De winst is dan $30 \times 25 + 20 \times 25$ = €1.250.

- Kies $x = 25$ en $y = 30$. Dan wordt wel voldaan aan de fabricagerestrictie, maar *niet* aan de verpakkingsrestrictie. Zo'n productieprogramma is dus niet toelaatbaar.

Blijkbaar zijn er waarden voor x en y te vinden die een toelaatbaar productieprogramma opleveren, maar ook zijn combinaties te bedenken die geen toelaatbaar productieprogramma opleveren. De grafische methode berust er nu op, dat we eerst een gebied gaan construeren van toelaatbare productieprogramma's. Daarna proberen we díe combinatie van x en y te vinden die de winstbijdrage maximaliseert.

We bekijken eerst de fabricagerestrictie. Als we het 'kleiner-dan-of-gelijk-aan'-teken vervangen door het 'is-gelijk'-teken, krijgen we de vergelijking $2x + y = 100$. Deze vergelijking stelt wiskundig gezien een rechte lijn voor. Eerst herschrijven we de vergelijking als: $y = -2x + 100$. We zien dat de vergelijking een rechte lijn is met richtingscoëfficiënt –2. In figuur 1.1 is een en ander weergegeven.

Figuur 1.1 **De rechte lijn 2x + y = 100**



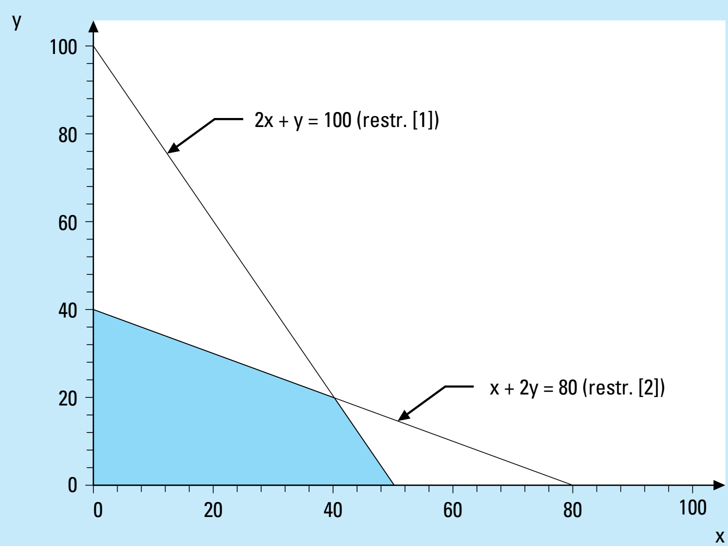
Het blauwe gebied in figuur 1.1 is het toelaatbare gebied met betrekking tot de fabricagerestrictie. Elke combinatie van x en y in het blauwe gebied voldoet aan die restrictie en is dus met betrekking tot die restrictie (en ook alléén maar met betrekking tot die restrictie) een toelaatbare oplossing.

Oefening 1.4
Construeer op dezelfde manier het toelaatbare gebied met betrekking tot de verpakkingsrestrictie.

Toelaatbaar gebied

Een toelaatbaar productieprogramma moet echter aan beide restricties voldoen. Daarom tekenen we in één figuur beide restricties. Het blauwe gebied in die figuur geeft dan alle combinaties van de variabelen x en y die aan beide restricties voldoen en dus een geldig productieprogramma opleveren. Dit *toelaatbaar gebied* is weergegeven in figuur 1.2 Restr. [1] is de fabricagerestrictie, restr. [2] is de verpakkingsrestrictie.

Figuur 1.2 **Toelaatbaar gebied van het planningprobleem**



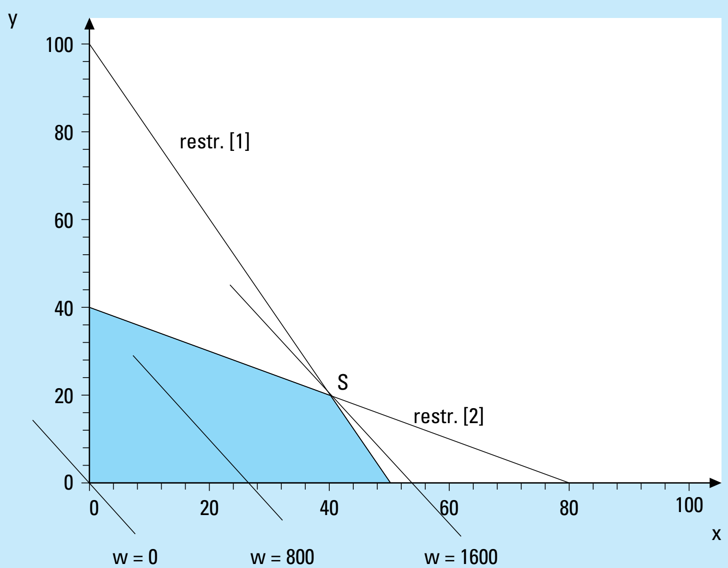
Van alle mogelijke combinaties van x en y (uit het toelaatbare gebied) zoeken we nu die combinatie die een maximale winstbijdrage oplevert. Die winstbijdrage wordt gegeven door de doelfunctie: w = 30x + 20y. Ook dit is weer een vergelijking van een rechte lijn, die we kunnen schrijven als:

$$y = -\frac{30}{20}x + \frac{w}{20} \quad \text{ofwel:} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{w}{20}$$

In figuur 1.3 is de doelfunctie getekend voor verschillende waarden van de winstbijdrage, namelijk bij w = 0, w = 800 en w = 1600.

Merk op dat de winstbijdrage toeneemt naarmate we de doelfunctie verder naar rechts opschuiven. Dat opschuiven naar rechts kunnen we blijven doen tot we terechtkomen in het punt S, het punt dat nog net behoort tot het toelaatbare gebied. Dit punt S is het snijpunt van de restricties [1] en [2] (zie figuur 1.3) en kan worden berekend door het

Figuur 1.3 **Richting van de doelfunctie**



stelsel van vergelijkingen dat bij die restricties hoort, op te lossen. Dat stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{cases} 2x + y = 100 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is: x = 40 en y = 20. De maximale winstbijdrage is dan: w = 30 × 40 + 20 × 20 = 1600.
Dus, in termen die de onderneming begrijpt:
Design bv moet voor de komende week 40 dozen T-shirts maken en 20 dozen overhemden. De bijdrage in de winst is dan maximaal en bedraagt €1.600.

Optimale oplossing

Bindende restricties

Actieve restricties

Als we de restricties uit het planningmodel van Design bekijken bij deze *optimale* oplossing, dan zien we dat zowel de restrictie op de beschikbare fabricage-uren, als de restrictie op de verpakking niet meer een ‘kleinergelijk-restrictie’ is, maar dat beide restricties gelijkheden zijn geworden. We zeggen dat deze twee restricties *bindend* zijn. Bindende restricties worden ook wel *actieve restricties* genoemd. Het betekent ook dat er zowel in de fabricageafdeling als op de verpakkingsafdeling geen capaciteit meer over is.

Oefening 1.5
Bepaal de optimale oplossing voor dit planningprobleem nog eens als de winstbijdrage op een doos overhemden €10 bedraagt in plaats van €20.

Men kan bewijzen, maar we doen dat hier niet, dat als er een optimale oplossing is, deze altijd ligt op één van de hoekpunten van het toelaatbare gebied. De optimale oplossing kan dus ook worden gevonden door de winstbijdrage uit te rekenen in alle hoekpunten van het toelaatbare gebied en dan de grootste waarde te kiezen. Als er echter veel restricties zijn, zijn er in het algemeen ook veel hoekpunten van het toelaatbare gebied. Het berekenen van de winstbijdrage in elk hoekpunt is in dit soort gevallen geen handige methode.

1.2.2 Marketingprobleem (grafische methode)

Minimalisering van de kosten

In dit probleem is het doel niet maximalisering van de winstbijdrage, maar *minimalisering* van de kosten. Bovendien komen we in dit probleem nog een ander type restrictie tegen, namelijk de 'groter-dan-of-gelijk-aan-restrictie'. Als oplosmethode kiezen we de grafische manier.

Opmerking
Ook in dit voorbeeld zijn de getallen bewust zodanig gekozen dat het (handmatige) rekenwerk eenvoudig is: de oplossing, zo zal blijken, is weer een 'mooie', geheeltallige oplossing. Als we in latere voorbeelden de computer bij het oplossen van dit soort problemen gaan gebruiken, komen we 'gewone' oplossingen tegen.

Stap 1 Probleembeschrijving
Marketingbureau W&H moet voor één van haar klanten een onderzoek verrichten bij inwoners van Vlissingen en Middelburg. Het bureau besluit om een zogenoemde huis-aan-huis-enquête te houden. De enquêtes kunnen zowel overdag als 's avonds worden afgenomen.
De kosten per enquête overdag worden geschat op €50 en van een enquête in de avonduren op €75. Vanwege de statistische betrouwbaarheid van de resultaten moeten er in totaal minstens 800 enquêtes worden gehouden. Omdat veel mensen overdag moeilijk bereikbaar zijn, moeten minstens 300 enquêtes 's avonds worden gehouden.
Het bureau heeft maximaal 700 uur beschikbaar om het onderzoek uit te voeren. Het houden van een enquête overdag neemt een half uur in beslag. Een enquête 's avonds vergt een vol uur.
W&H wil graag weten, hoeveel enquêtes er overdag moeten worden gehouden en hoeveel enquêtes 's avonds, als de totale kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Natuurlijk wil ze ook weten hoe groot die minimale totale kosten dan zijn.

Stap 2 Beslissingsvariabelen
Er zijn twee beslissingen te nemen: hoeveel enquêtes dienen er overdag afgenomen te worden en hoeveel enquêtes 's avonds? Daarom kiezen we twee beslissingsvariabelen:
x_1 = aantal enquêtes overdag te houden;
x_2 = aantal enquêtes 's avonds te houden.

Stap 3 Doelfunctie
We drukken de totale kosten van het enquêteren uit in de beslissingsvariabelen x_1 en x_2. De kosten bedragen dan: $50x_1 + 75x_2$. Als we die totale kosten k noemen, geldt dus: $k = 50x_1 + 75x_2$. Deze kosten moeten worden geminimaliseerd. De doelfunctie wordt daarom:
Minimaliseer $k = 50x_1 + 75x_2$.

Stap 4 Restricties
Er moeten in totaal minstens 800 enquêtes worden gehouden. Deze restrictie, uitgedrukt in de beslissingsvariabelen, luidt: $x_1 + x_2 \geq 800$.
De voorwaarde dat er minstens 300 enquetes 's avonds gehouden moeten worden, vertalen we als volgt: $x_2 \geq 300$.
Ten slotte is er nog een restrictie met betrekking tot het aantal beschikbare uren. Uitgedrukt in de beslissingsvariabelen luidt deze restrictie: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 700$.

Er zijn dus in totaal drie restricties.

Er zijn een paar belangrijke verschillen ten opzichte van het model uit paragraaf 1.2.1:

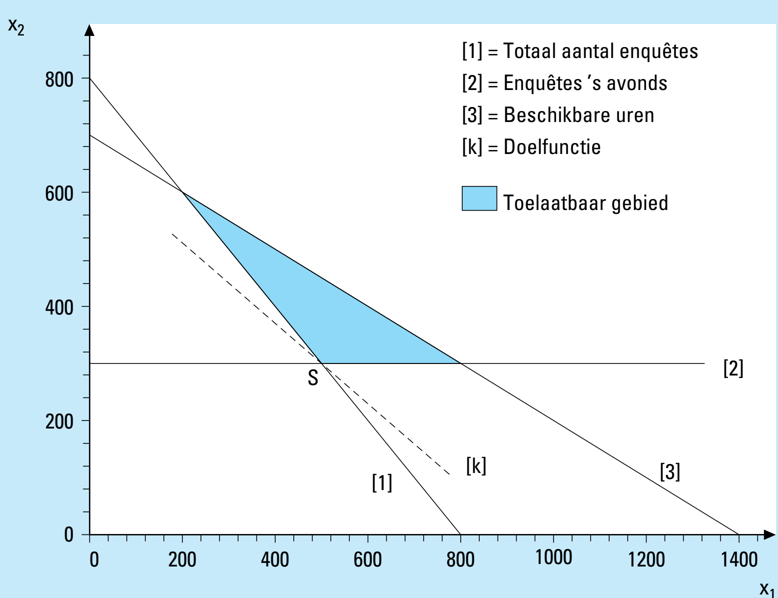
1 We hebben hier te maken met een minimaliseringsprobleem in plaats van een maximaliseringsprobleem.
2 We hebben in dit model te maken met een nieuw soort restricties, namelijk zogenoemde '*groter-gelijk-restricties*', zie de eerste twee restricties in het wiskundig model.

Groter-gelijk-restricties

Het model is echter wel weer een lineair programmeringsmodel dat grafisch is op te lossen, omdat er slechts twee beslissingsvariabelen zijn.

Stap 5 Grafische oplossing
De oplossing is weergegeven in figuur 1.4.

Figuur 1.4 **Enquête-onderzoek**



De waarde van de doelfunctie wordt kleiner (we moeten immers minimaliseren!) naarmate die doelfunctie verder naar links wordt opgeschoven.

Oefening 1.6

a Teken in figuur 1.4 de doelfunctie als de kosten €80.000 zijn.
b Welke combinaties van x_1 en x_2 (liggend op die doelfunctie) vormen een toelaatbare oplossing?
c Bereken de kosten in de hoekpunten van het toelaatbare gebied.

Het optimumpunt S (het punt waar de kosten dus minimaal zijn) wordt bepaald door het snijpunt van de restricties [1] en [2], dat wil zeggen dat we het volgende stelsel vergelijkingen moeten oplossen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \\ \quad\;\; x_2 = 300 \end{cases}$$

De oplossing is: $x_1 = 500$ en $x_2 = 300$.

Er moeten dus 500 enquêtes overdag worden gehouden en 300 enquêtes 's avonds. De minimale totale kosten bedragen dan:

$$k_{min} = 500 \times €50 + 300 \times €75 = €47500$$

Oefening 1.7

a Welke restricties zijn in het marketingprobleem de actieve restricties? Wat betekent dat?
b Hoeveel beschikbare uren zijn daadwerkelijk gebruikt?

1.2.3 Mini-onderneming (computeroplossing met de Oplosser)

In dit probleem komen de stappen 1 t/m 5 uit het stappenplan aan de orde. In stap 5 presenteren we de computeroplossing met behulp van de Oplosser uit Excel. De gevoeligheidsanalyse (stap 6) laten we in deze paragraaf nog even achterwege.

Stap 1 Probleembeschrijving

Een bekend fenomeen in het hoger onderwijs is de zogenoemde mini-onderneming. Studenten runnen gedurende een bepaalde periode, meestal één studiejaar, een echte onderneming. Ze mogen zelf bepalen welke producten ze maken. Ook Jacomien Bolmikolke maakt deel uit van zo'n mini-onderneming. Deze onderneming maakt twee producten: wenskaarten en verjaarskaarten. De winst op een verjaarskaart is 60 eurocent en op een wenskaart 40 eurocent. Elke week heeft de onderneming 2,5 uur beschikbaar om die kaarten te maken. Het maken van zowel een verjaarskaart als een wenskaart vergt 4 minuten. In verband met afzetverplichtingen moeten er minstens 5 verjaarskaarten en 10 wenskaarten per week worden gemaakt.
Gevraagd: een optimaal weekplan te bepalen als de winst moet worden gemaximaliseerd.

Stap 2 Beslissingsvariabelen
Als beslissingsvariabelen kiezen we:
- x_1 = aantal verjaarskaarten dat per week moet worden gemaakt;
- x_2 = aantal wenskaarten dat per week moet worden gemaakt.

Stap 3 Doelfunctie
De totale winst in eurocenten, uitgedrukt in de beslissingsvariabelen, is: $60x_1 + 40x_2$. Als we die winst weer w noemen, is de doelfunctie te schrijven als: $w = 60x_1 + 40x_2$. Deze winst dient te worden gemaximaliseerd. De doelfunctie wordt dus: maximaliseer $w = 60x_1 + 40x_2$.

Stap 4 Restricties
Uit de probleemformulering valt af te leiden, dat er drie restricties zijn: een capaciteitsrestrictie en twee afzetrestricties. De capaciteitsrestrictie, uitgedrukt in de beslissingsvariabelen, luidt: $4x_1 + 4x_2 \leq 150$, waarbij de beschikbare capaciteit uitgedrukt is in minuten. De afzetrestricties luiden: $x_1 \geq 5$ en $x_2 \geq 10$.
Het model voor deze mini-onderneming ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{array}{llll} \text{Maximaliseer } w = 60x_1 + 40x_2\,. & & & \\ \text{m.b.t.} & 4x_1 + 4x_2 \leq 150 & & \text{[capaciteitsbeperking]} \\ & x_1 \geq 5 & & \text{[afzet verjaarskaarten]} \\ & x_2 \geq 10 & & \text{[afzet wenskaarten]} \end{array}$$

Oefening 1.8
a Bepaal met de grafische methode de oplossing voor het probleem van de mini-onderneming.
b Bepaal met de grafische methode nogmaals de oplossing als de winst op beide kaarten €0,60 bedraagt.

Stap 5 Oplossing met behulp van Excel
In de praktijk worden vrijwel alle LP-problemen opgelost met behulp van een software-pakket. Ook het spreadsheet-pakket Excel beschikt over een optie om LP-problemen op te lossen. Excel noemt deze optie de 'Oplosser' (in de Engelse versie van Excel de 'Solver' genoemd). In grote lijnen volgen we bij het maken van het spreadsheet-model het stappenplan:
- Stap 1 Open een nieuw werkblad en maak een cellenblok met daarin de gegevens.
- Stap 2 Maak een cellenblok met de beslissingsvariabelen.
- Stap 3 Maak een cellenblok met de doelfunctie.
- Stap 4 Maak een cellenblok met de restricties.

In tabel 1.2 is de spreadsheet weergegeven voor het probleem van de mini-onderneming.

Toelichting op het spreadsheet-model van tabel 1.2
- In blok A1 tot en met D5 staan de gegevens van de mini-onderneming. De getallen in dit blok zijn 'echte' getallen.
- In blok A8 tot en met B10 staan de beslissingsvariabelen; in B9 en B10 komen na activering van de 'Oplosser' de optimale waarden te staan.

Tabel 1.2 **Spreadsheet van de mini-onderneming**

	A	B	C	D
1	**Gegevens:**			
2		Verjaarskaart	Wenskaart	Beschikbaar
3	Bijdrage winst	60	40	
4	Prod.tijd (in minuten)	4	4	150
5	Minimale afzet	5	10	
6				
7				
8	**Besl.var.:**		**Doelfunctie:**	Max winst
9	Verjaarskaart			0
10	Wenskaart			
11				
12	**Restricties:**			
13	Capaciteit	0	<=	150
14	Afzet verjaarskaart	0	>=	5
15	Afzet wenskaart	0	>=	10

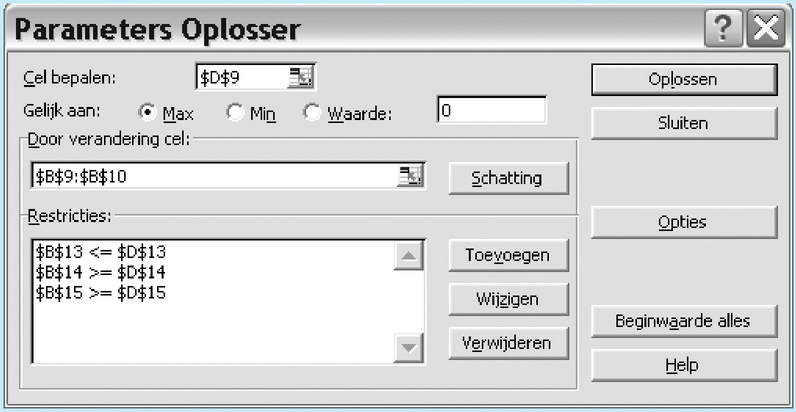
- In het blok C8 tot en met D9 staan doel en doelfunctie. De maximale winst komt in cel D9 te staan. In cel D9 staat de formule voor de winst: =B3*B9+C3*B10. De waarde ervan is bij het maken van het spreadsheet-model nul, omdat de beslissingsvariabelen nog geen waarde hebben.
- In blok A12 tot en met D15 staan de restricties:
  – In cel B13 staat de formule voor de benodigde capaciteit: = B4*B9 + C4*B10.
  – In cel B14 staat de formule voor de afzet van verjaarskaarten: = B9.
  – In cel B15 staat de formule voor de afzet van wenskaarten: = B10.

Tot slot stap 5.
- Stap 5 Activeer de ‘Oplosser’ om de oplossing te laten berekenen. Deze oplossing staat in 3 nieuwe werkbladen die door Excel worden aangemaakt:
  – een werkblad met de oplossing;
  – een werkblad met de gevoeligheidsanalyse;
  – een werkblad met ‘limieten’.

Dus: eerst het spreadsheet-model maken, daarna de ‘Oplosser’ activeren met behulp van het commando: *Extra/Oplosser*. Er opent zich dan een nieuw scherm met de naam ‘Parameters Oplosser’. Dit scherm is weergegeven in figuur 1.5.

In het scherm **Cel bepalen:** komt de cel te staan waarin de doelfunctie staat. In het voorbeeld van de mini-onderneming is dat cel D9.
Bij **Gelijk aan:** geven we aan dat we willen maximaliseren. In het schermpje daarnaast staat standaard de beginwaarde 0 voor dit maximum.
Bij **Door verandering cel:** geven we aan welke cellen moeten worden veranderd teneinde tot een maximum te kunnen komen. Dat zijn de cellen waar de beslissingsvariabelen staan, hier de cellen B9 en B10.
Ten slotte in het onderste scherm, bij **Restricties:** komen de cellen met

Figuur 1.5 **Invulscherm van de 'Oplosser'**

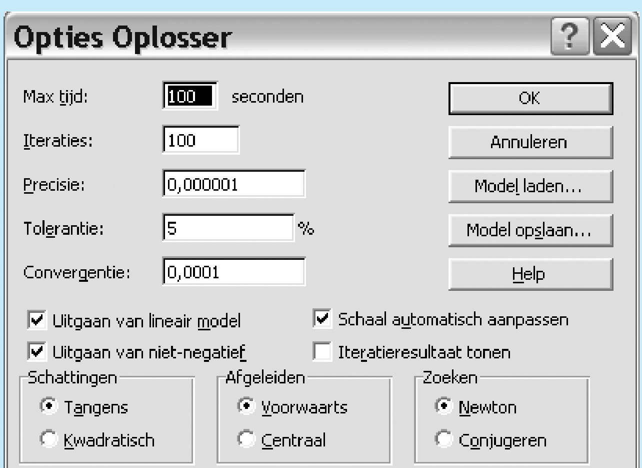


de linkerleden van de restricties, het teken van de restricties (<=, >=, of =) en de rechterleden van de restricties. In dit voorbeeld:

- B13 <= D13
- B14 >= D14
- B15 >= D15.

Met behulp van de 'Oplosser' in Excel kan een veelheid aan problemen worden opgelost. Niet alleen lineaire problemen (zoals de hier besproken LP-problemen), maar ook vele niet-lineaire problemen. Daarom moet in Excel expliciet worden aangegeven dat we een lineair model willen oplossen. We doen dit met behulp van de knop **Opties.** Er opent zich dan weer een nieuw scherm, zie figuur 1.6.

Figuur 1.6 **Opties van de 'Oplosser'**

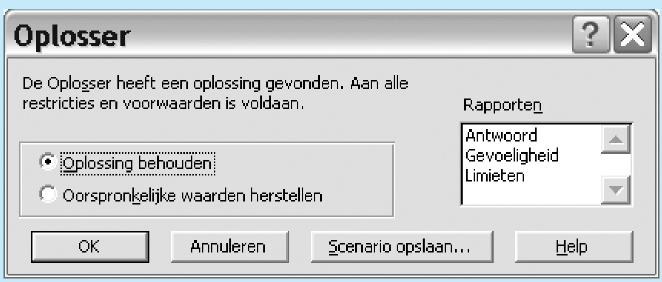


In dat scherm moet worden aangegeven dat we een lineair programmeringsmodel willen oplossen en dat we veronderstellen dat de beslissingsvariabelen niet-negatief zijn. We doen dit door respectievelijk **Uitgaan van lineair model** en **Uitgaan van niet-negatief** aan te vinken.
Het aanvinken van **Schaal automatisch aanpassen** is soms noodzakelijk, maar vaak ook niet. De beslissingsvariabelen in een model kunnen zeer sterk verschillen in de orde van grootte. Bijvoorbeeld: de variabele 'winst' kan in de orde van enkele miljoenen liggen, maar de variabele 'bezetting van een machine' kan liggen in de orde van grootte van 0,8 (80%). Excel kan daardoor bij het wiskundig doorrekenen zogenoemde

Numerieke problemen

numerieke problemen tegenkomen. Om dit te voorkomen spreken we af dat we de schaal waarop wordt gerekend door Excel automatisch laten aanpassen. We vinken die optie dus altijd aan.
De overige waarden in dat scherm laten we onbesproken. Ook die hebben te maken met de methode van doorrekenen die Excel kiest om tot een optimum te komen.
Als alles is ingevuld, kan met de knop **Oplossen** (in het scherm van de 'Oplosser') worden gekozen voor het oplossen van het LP-model. We krijgen dan het scherm van figuur 1.7 te zien.

Figuur 1.7 **Scherm 'Er is een oplossing'**



Er worden drie rapporten aangemaakt, die ook in drie werkbladen worden gepresenteerd. Deze drie rapporten vormen dus de output van het model. De eerste twee rapporten zijn het belangrijkst en bespreken we hierna. Maar ook in het spreadsheet-model dat we hebben gemaakt, komt de optimale oplossing te staan, zie de vetgedrukte getallen in tabel 1.3:

- De optimale waarden van de beslissingsvariabelen worden in de cellen B9 en B10 gezet.
- De maximale waarde van de doelfunctie komt in cel D9 te staan.
- De linkerleden van de restricties krijgen hun waarden in de cellen B13 tot en met B15.

Het lijkt niet logisch dat er 27,5 verjaarskaarten moeten worden gemaakt. Je kunt immers niet een halve verjaarskaart verkopen.
Maar strikt genomen kan het antwoord ook worden opgevat als: maak in de betreffende week 27 verjaarskaarten geheel af. De 28e kaart waarmee je bezig bent, komt niet in deze planningperiode gereed, maar wordt afgemaakt in de volgende periode.

Overigens, het is wel degelijk mogelijk om als optimaal antwoord een geheeltallige oplossing te eisen. We komen daarop in volgende voorbeelden nog uitvoerig terug.

Oefening 1.9
Bepaal met behulp van Excel nog eens de optimale oplossing voor de mini-onderneming, als de winst op een wenskaart 60 eurocent is en op een verjaarskaart 40 eurocent.
Bestudeer zorgvuldig de outputrapporten die Excel genereert.

Tabel 1.3 **Spreadsheet van de mini-onderneming na oplossen van het model**

	A	B	C	D
1	**Gegevens:**			
2		Verjaarskaart	Wenskaart	Beschikbaar
3	Bijdrage winst	60	40	
4	Prod.tijd (min)	4	4	150
5	Minimale afzet	5	10	
6				
7				
8	**Besl. var.:**		**Doelfunctie:**	Max winst
9	Verjaarskaart	**27,5**		**2050**
10	Wenskaart	**10**		
11				
12	**Restricties:**			
13	Capaciteit	**150**	<=	150
14	Afzet verjaarskaart	**27,5**	>=	5
15	Afzet wenskaart	**10**	>=	10

1.2.4 Mini-onderneming (grafische methode van gevoeligheidsanalyse)

De zesde stap uit het stappenplan is de gevoeligheidsanalyse. Deze gevoeligheidsanalyse is erg belangrijk. Als een probleem niet meer dan twee beslissingsvariabelen heeft, kan de gevoeligheidsanalyse op een grafische manier worden uitgevoerd. We behandelen de gevoeligheidsanalyse aan de hand van het planningprobleem van de mini-onderneming van Jacomien Bolmikolke. Hoe we de gevoeligheidsanalyse uitvoeren met Excel komt in paragraaf 1.2.5 aan de orde.

Stap 6 Gevoeligheidsanalyse
Om het (handmatig) rekenwerk niet nodeloos ingewikkeld te maken, is aangenomen dat de beschikbare capaciteit in deze planningperiode 2 uur bedraagt (120 minuten). Het gaat immers om het principe van de gevoeligheidsanalyse. Het wiskundig model van de mini-onderneming wordt dan:

$$\begin{array}{lrll} \text{Maximaliseer } w = 60x_1 + 40x_2 & & & \\ \text{m.b.t.} & 4x_1 + 4x_2 \leq & 120 & \text{[capaciteitsbeperking]} \\ & x_1 \qquad \geq & 5 & \text{[afzet verjaarskaarten]} \\ & x_2 \geq & 10 & \text{[afzet wenskaarten]} \end{array}$$

Oefening 1.10
Ga met behulp van de grafische methode na dat de optimale oplossing is: maak 20 verjaarskaarten en 10 wenskaarten. De maximale winst is dan 1600.

De winst op een verjaarskaart, zo lezen we in de doelfunctie, bedraagt 60 eurocent en op een wenskaart 40. Die getallen komen in het algemeen tot stand door de opbrengst te verminderen met de kosten. In de praktijk zijn die bedragen echter niet met zekerheid bekend, omdat de kosten niet altijd even nauwkeurig zijn in te schatten of te berekenen. Als bijvoorbeeld de kosten een beetje anders uitpakken, krijgen ook de coëfficiënten van de doelfunctie een andere waarde dan ze nu hebben. Jacomien van de mini-onderneming vraagt zich daarom af of de oplossing die nu is bereikt, erg gevoelig is voor veranderingen in de waarde van de coëfficiënten van de doelfunctie.
Er is echter nog een tweede vraag te stellen. Bekijken we nog eens de capaciteitsrestrictie, dan zien we dat het 4 minuten duurt om zowel een wenskaart te maken als een verjaarskaart. Maar ook dit zijn waarden die het gevolg zijn van (goede) berekeningen, soms schattingen, die in de praktijk anders kunnen uitpakken. Ook hier kunnen we dezelfde vraag stellen: Is de oplossing gevoelig voor veranderingen in de coëfficiënten van de restricties?
Ten slotte is nog een derde vraag te stellen. Ook de waarden van de rechterleden van de restricties (bijvoorbeeld de totale capaciteit van 120 minuten, of het minimaal aantal wenskaarten) zijn niet altijd met zekerheid vast te stellen. Dus ook hier weer de vraag: Is de oplossing gevoelig voor veranderingen in de waarden van de rechterleden?

Gevoeligheidsanalyse

Het onderzoek naar het antwoord op voorgaande drie vragen wordt *gevoeligheidsanalyse* genoemd. Ook wij houden ons bezig met die gevoeligheidsanalyse, maar alleen wat betreft de eerste en de derde vraag. Gevoeligheidsanalyse op de coëfficiënten van de restricties is dermate lastig, dat we het in het kader van dit hoofdstuk achterwege laten. Ook Excel laat dat onderdeel van de gevoeligheidsanalyse achterwege.
Verder besteden we aandacht aan de zogenoemde 100%-regel. Deze regel is nuttig als we in de doelfunctie twee of meer coëfficiënten *tegelijkertijd* willen variëren, of als we twee of meer rechterleden van restricties *tegelijkertijd* willen variëren.

Schaduwprijs

Als eerste behandelen we de gevoeligheidsanalyse op de rechterleden van de restricties. Bij deze analyse komen we een belangrijk begrip uit de economie tegen, namelijk het begrip: *schaduwprijs* (in het Engels: *shadow-price*). Als voorbeeld bekijken we de restrictie met betrekking tot de afzet van wenskaarten. Deze restrictie luidt: $x_2 \geq 10$. We vragen ons nu af hoe de nieuwe oplossing er uit gaat zien als we het rechterlid met één eenheid laten toenemen. Welnu, dan wordt de oplossing bepaald door het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ \quad\quad\;\; x_2 = 11 \end{cases}$$

De oplossing van dat stelsel is: $x_1 = 19$ en $x_2 = 11$. Met een doelfunctiewaarde van: $60 \times 19 + 40 \times 11 = 1580$.
De waarde van de doelfunctie is dus afgenomen met 20 eurocent, ofwel toegenomen met –20 eurocent. Deze waarde van –20 wordt de *schaduwprijs van de restrictie* genoemd.

Schaduwprijs van de restrictie

De schaduwprijs van een restrictie is dus de toename van de doelfunctie als het rechterlid van de betreffende restrictie met 1 eenheid toeneemt.

Oefening 1.11
Verifieer via een berekening dat de schaduwprijs van de capaciteitsrestrictie gelijk is aan 15 eurocent.

Als we de schaduwprijs gaan uitrekenen voor de afzetrestrictie van de verjaarskaarten, vinden we een waarde gelijk aan nul. Dit is ook logisch, want een verhoging van het rechterlid van deze restrictie met 1 eenheid heeft geen invloed op de oplossing. De oplossing wordt niet (mede) bepaald door deze restrictie! Deze restrictie is immers geen bindende restrictie.
Dit geldt algemeen:

Als in een willekeurig LP-model een restrictie geen bindende restrictie is, is de schaduwprijs behorend bij zo'n restrictie gelijk aan nul.

De meeste software-pakketten voor lineaire programmering (ook Excel) berekenen niet alleen de schaduwprijzen van alle restricties, maar ze berekenen ook binnen welke range van het rechterlid deze schaduwprijs geldig blijft.
Bekijken we tabel 1.4 voor het voorbeeld van de mini-onderneming. Deze tabel is afkomstig uit het Excel-rapport betreffende de gevoeligheidsanalyse.

Tabel 1.4 **Restricties**

Cel	Naam	Eind-waarde	Schaduw prijs	Rechterzijde restrictie	Toegestane toename	Toegestane afname
\$B\$13	Capaciteit	120	15	120	1E+30	60
\$B\$14	Afzet verjaarskaart	20	0	5	15	1E+30
\$B\$15	Afzet wenskaart	10	–20	10	15	10

De twee laatste kolommen geven respectievelijk de toename en afname aan voor de rechterzijde van de restricties. Zo blijft de schaduwprijs van –20 voor de *afzetrestrictie op wenskaarten* geldig, zolang de rechterzijde van die restrictie maar blijft inliggen tussen 0 (namelijk 10 minus de toegestane afname van 10) en 25 (namelijk 10 plus de toegestane toename van 15).

Oefening 1.12
Zie tabel 1.4. Waarom mag de afname van de rechterzijde van de capaciteitsrestrictie niet méér bedragen dan 60?

Het nut van het goed analyseren van de schaduwprijzen moge duidelijk zijn. Veronderstel dat de mini-onderneming volgende week een uur (dus 60 minuten) meer capaciteit heeft om verjaarskaarten en wenskaarten te maken. Het rechterlid van de capaciteitsrestrictie gaat dan omhoog van 120 naar 180. De schaduwprijs blijft echter, zo valt af te lezen uit tabel 1.4, onveranderd 15 eurocent. De mini-onderneming maakt dan (180 – 120) × 15 eurocent = 900 eurocent meer winst. Natuurlijk moet deze extra winst worden afgezet tegen de extra kosten die worden gemaakt als de capaciteit wordt uitgebreid. Maar als de kosten van capaciteitsuitbreiding per eenheid lager zijn dan de schaduwprijs, is het voordelig om uit te breiden.

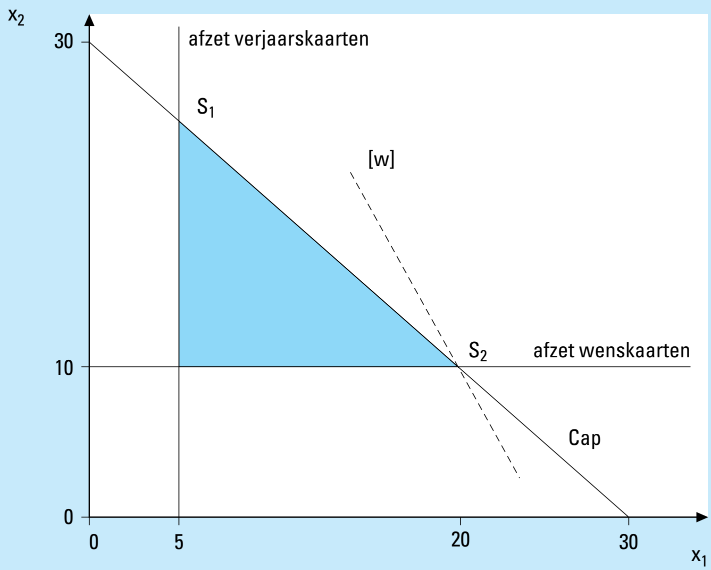
Gevoeligheidsanalyse op de coëfficiënten van de doelfunctie

Dan gaan we nu in op de *gevoeligheidsanalyse op de coëfficiënten van de doelfunctie*. De doelfunctie van de mini-onderneming is:
$w = 60x_1 + 40x_2$. Dit is een rechte lijn, zo hebben we al eerder gezien, met een richtingscoëfficiënt (rico) gelijk aan: $rico = -\frac{60}{40}$ (we hebben deze breuk expres niet vereenvoudigd). Deze richtingscoëfficiënt is precies gelijk aan de verhouding van de coëfficiënten van de doelfunctie. In de teller staat de coëfficiënt van x_1 (de winst op een verjaarskaart), in de noemer staat de coëfficiënt van x_2 (de winst op een wenskaart). We beginnen met het laten variëren van de coëfficiënt van x_1. We noemen die coëfficiënt daarom c_1. Dus c_1 is de winst op een verjaarskaart. De richtingscoëfficiënt van de doelfunctie is dan dus gelijk aan: $rico = -\frac{c_1}{40}$.
Eerst laten we de winst groter worden dan de 60 eurocent die hij nu is. Als c_1 bijvoorbeeld 80 eurocent wordt, gaat de doelfunctie wat steiler lopen. Verifieer dit met behulp van figuur 1.8 die hier is weergegeven.

Nu de andere kant. Als de winst op een verjaarskaart kleiner wordt, gaat de doelfunctie steeds platter lopen. In eerste instantie blijft de optimale oplossing het punt S_2. Maar als de doelfunctie platter gaat lopen dan de capaciteitsrestrictie, gaat de optimale oplossing verschuiven naar het punt S_1, zie figuur 1.8. We krijgen dan dus een andere oplossing!
De grenswaarde waarbij de oplossing nog het punt S_2 blijft, is dus een winst op een verjaarskaart zodanig, dat de richtingscoëfficiënt van de doelfunctie gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de capaciteitsrestrictie. De richtingscoëfficiënt van de capaciteitsrestrictie is gelijk aan –1, dus als de richtingscoëfficiënt van de doelfunctie ook –1 is, hebben we die grenswaarde bereikt. Dan geldt: $-\frac{c_1}{40} = -1$, ofwel $c_1 = 40$.
Als de winst op een verjaarskaart dus lager wordt dan 40 eurocent, krijgen we een andere optimale oplossing.

We kunnen het ook anders formuleren. Zolang de winst op een verjaarskaart blijft inliggen tussen 40 eurocent en ∞ (oneindig) eurocent, blijft de mini-onderneming 20 verjaarskaarten en 10 wenskaarten pro-

Figuur 1.8 **Grafische oplossing mini-onderneming**



duceren. Het getal 1E+30 betekent $1 \times 10^{+30}$. Excel gebruikt deze notatie om het getal 'oneindig' aan te geven.

Gevoeligheidsrapport

Excel rekent die grenswaarden ook uit in het rapport betreffende de gevoeligheidsanalyse, zie tabel 1.5, eveneens afkomstig uit het gevoeligheidsrapport.

Tabel 1.5 **Aanpasbare cellen**

Cel	Naam	Eind-waarde	Gereduceerde kosten	Coëfficiënt doelfunctie	Toegestane toename	Toegestane afname
$B$9	Verjaarskaart	20	0	60	1E+30	20
$B$10	Wenskaart	10	0	40	20	1E+30

Oefening 1.13

Beredeneer, met behulp van figuur 1.8, dat de winst op een wenskaart mag variëren tussen 0 en 60 eurocent zonder dat de optimale oplossing verandert, zie ook tabel 1.5.

Opmerking

Gereduceerde opbrengst/kosten

Bij de behandeling van de intuïtieve oplossingsmethode hebben we het begrip *gereduceerde opbrengst* geïntroduceerd. In tabel 1.5 zien we een kolom *gereduceerde kosten*. In feite zijn dit dezelfde begrippen, ze verschillen alleen in teken: als de gereduceerde opbrengst gelijk is aan k, zijn de gereduceerde kosten gelijk aan –k en omgekeerd natuurlijk. In paragraaf 1.3.6 komen we nog terug op het begrip gereduceerde kosten.

100%-regel

Als laatste onderdeel van deze paragraaf behandelen we de *100%-regel* voor de coëfficiënten van de doelfunctie. Bezien we daartoe nogmaals het wiskundig model van de mini-onderneming:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximaliseer } w = 60x_1 + 40x_2 & & & \\ \text{m.b.t.} & 4x_1 + 4x_2 \leq & 120 & \text{[capaciteitsbeperking]} \\ & x_1 \qquad \geq & 5 & \text{[afzet verjaarskaarten]} \\ & x_2 \geq & 10 & \text{[afzet wenskaarten]} \end{array}$$

Gevoeligheidsanalyse op de coëfficiënt van x_1 leerde dat deze coëfficiënt mag variëren tussen 40 en ∞ zonder dat de oplossing verandert. De grenswaarde naar beneden voor deze coëfficiënt is dus 40, zodat de toegestane verlaging gelijk is aan 60 – 40 = 20.
Gevoeligheidsanalyse op de coëfficiënt van x_2 leerde dat deze coëfficiënt mag variëren tussen 0 en 60 zonder dat de oplossing verandert. De grenswaarde naar boven is dus 60 en de toegestane verhoging is dus eveneens 20 (namelijk 60 – 40).

De theorie over gevoeligheidsanalyse is gebaseerd op de veronderstelling dat we slechts één coefficiënt veranderen en de rest ongemoeid laten. Vaak echter zijn we juist geïnteresseerd in de vraag wat er gebeurt als meerdere coëfficiënten tegelijk veranderen. Laten we eens veronderstellen dat een nauwkeurige herberekening van de winst per verjaarskaart heeft aangetoond dat die winst geen 60 eurocent is maar slechts 52 eurocent is. Die verlaging van 8 cent is dus (8/20) × (100) = 40% van de toegestane verlaging van 20.
De winst op een wenskaart daarentegen pakt beter uit: die blijkt na herberekening gelijk te zijn aan 44 in plaats van 40. Die verhoging is dus (4/20) × (100) = 20% van de toegestane verhoging van 20.

100%-regel voor doelfunctie coëfficiënten

De som van de procentuele veranderingen is dus 60%. De 100%-regel zegt nu het volgende:

> **Bepaal voor alle doelfunctiecoëfficiënten die veranderen de procentuele verhouding van de daadwerkelijke verandering en de toegestane verandering. Als de som van al deze procentuele veranderingen onder de 100% blijft, zal de optimale oplossing niet veranderen.**

Voor de minionderneming betekent dit dus dat de optimale oplossing niet verandert. De onderneming blijft 20 verjaarskaarten en 10 wenskaarten maken. De optimale winst verandert natuurlijk wel. Die wordt in de nieuwe situatie gelijk aan w = 52 × 20 + 44 × 10 = 1480.

100-procentregel voor restricties

Er bestaat ook een honderd-procent-regel voor de rechterleden van de restricties. Bij gebruik van deze regel bepalen we voor iedere restrictie de procentuele verhouding van de verandering van het rechterlid en de toegestane verandering. Wanneer de optelling van alle procentuele verhoudingen onder de 100% blijft, dan geldt dat de totale schaduwprijs gelijk is aan de optelling van de schaduwprijzen van de afzonderlijke restricties. In paragraaf 1.3 en 1.4 wordt deze regel toegepast.

Opmerking
De 100%-regel zegt *niet* dat de optimale oplossing verandert als de som van de procentuele veranderingen boven de 100% uitkomt. Als er niet aan de 100%-regel wordt voldaan, moet het probleem opnieuw worden opgelost om het effect van veranderingen van de doelfunctiecoëfficiënten te bepalen.

1.2.5 Beleggingsprobleem (gevoeligheidsanalyse met behulp van Excel)

In de paragrafen 1.2.1 tot en met 1.2.4 hebben we voorbeelden van LP-problemen behandeld met maximaal twee beslissingsvariabelen. Deze voorbeelden zijn dus zowel grafisch als met de computer op te lossen. De meeste praktische problemen hebben echter (veel) meer dan twee beslissingsvariabelen. Zo hebben de LP-problemen uit de olie-industrie vele honderden beslissingsvariabelen en ook honderden, zo niet duizenden restricties.
Dat soort grote LP-problemen bespreken we in dit hoofdstuk niet, maar een iets groter probleem dan de voorbeelden tot nog toe behandelen we in deze paragraaf. We beginnen zoals gebruikelijk met de probleembeschrijving.

Stap 1 Probleembeschrijving
WMF bv in Amsterdam wil het komende jaar maximaal €100.000 gaan beleggen in de olie-industrie, in de chemie en in staatsobligaties. De financieel expert van het bedrijf heeft vijf beleggingsmogelijkheden op een rij gezet, samen met de verwachte ROI (return on investment), zie tabel 1.6.

Tabel 1.6 **Verwachte ROI**

Investering	ROI (in %)
Shell	8,5
Esso	9,5
DSM	6,0
Akzo Nobel	7,5
Staatsobligaties	4,5

Het management van WMF heeft de volgende richtlijnen gegeven met betrekking tot de investeringen:
1 In olie mag niet meer dan 50% van het budget worden geïnvesteerd.
2 Ook in de chemie mag niet meer dan 50% worden geïnvesteerd.
3 De investeringen in obligaties moeten minstens 25% van de investeringen in chemie zijn.
4 De investering in Esso (hoogste ROI, maar het grootste risico) mag niet meer zijn dan 55% van de totale investering in olie.

Hoeveel moet er in de diverse fondsen gaan worden belegd om de totale ROI te maximaliseren?

Stap 2 Beslissingsvariabelen
WMF moet vijf beslissingen nemen: hoeveel moet er belegd worden in Shell, hoeveel in Esso, hoeveel in DSM, in Akzo en in Staatsobligaties?
Als beslissingsvariabelen kiezen we daarom:
Shell = aantal euro te beleggen in aandelen Shell;
Esso = aantal euro te beleggen in aandelen Esso;
DSM = aantal euro te beleggen in aandelen DSM;

Akzo = aantal euro te beleggen in aandelen Akzo-Nobel;
Stobl = aantal euro te beleggen in staatsobligaties.

Natuurlijk kunnen we als namen van de beslissingsvariabelen ook kiezen voor x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5, maar de gekozen namen bevorderen de leesbaarheid van het model aanmerkelijk.

Stap 3 Doelfunctie

Als we €1 investeren in bijvoorbeeld Shell, is de verwachte ROI 8,5% van die euro, ofwel 0,085 euro.Als we 'Shell' euro investeren in aandelen Shell is de verwachte ROI dus: 0,085 × Shell. Eenzelfde redenering geldt voor de andere beslissingsvariabelen.
De totale verwachte opbrengst, (in euro), ofwel de totale return on investment bedraagt dus:
0,085 × Shell + 0,095 × Esso + 0,060 × DSM + 0,075 × Akzo + 0,045 × Stobl
Deze totale verwachte ROI moet worden gemaximaliseerd. De doelfunctie wordt dus:
Maximaliseer ROI = 0,085 × Shell + 0,095 × Esso + 0,060 × DSM + 0,075 × Akzo + 0,045 × Stobl.

Stap 4 Restricties

Er is natuurlijk een beperkende voorwaarde met betrekking tot het budget. Verder zijn er door de directie vier richtlijnen geformuleerd waaraan moet worden voldaan. Deze richtlijnen leveren dus ook vier restricties op. We verwachten dus in totaal vijf restricties:

1 Het totale bedrag dat in aandelen en obligaties wordt geïnvesteerd, is gelijk aan Shell + Esso + DSM + Akzo + Stobl. Dit bedrag mag de €100.000 niet te boven gaan. De budgetrestrictie wordt daarom:
Shell + Esso + DSM + Akzo + Stobl ≤ 100.000 [budget]
2 *Richtlijn 1*. In olie wordt in totaal 'Shell + Esso' euro geïnvesteerd. Deze hoeveelheid geld mag niet meer zijn dan de helft van de totale investering. Er geldt dus:
Shell + Esso ≤ 50.000 [olie]
3 *Richtlijn 2*. Voor de investeringen in chemie geldt een soortgelijke restrictie:
DSM + Akzo ≤ 50.000 [chemie]
4 *Richtlijn 3*. Deze richtlijn met betrekking tot de obligaties wordt vertaald naar:
Stobl ≥ 0,25 × (DSM + Akzo) [obligaties]
5 *Richtlijn 4*. De richtlijn met betrekking tot Esso (het grootste risico) wordt:
Esso ≤ 0,55 × (Shell + Esso) [risico]

Het complete wiskundig model van dit beleggingsprobleem wordt dus:

Maximaliseer ROI = 0,085 Shell + 0,095 Esso + 0,060 DSM + 0,075 Akzo + 0,045 Stobl
m.b.t.
Shell + Esso + DSM + Akzo + Stobl ≤ 100.000 [budget]
Shell + Esso ≤ 50.000 [olie]
DSM + Akzo ≤ 50.000 [chemie]
Stobl ≥ 0.25 × (DSM + Akzo) [obligaties]
Esso ≤ 0.55 × (Shell + Esso) [risico]
alle variabelen ≥ 0

In tabel 1.7 is het Excel-model weergegeven voor dit beleggingsprobleem.

Tabel 1.7 **Excel-model van het beleggingsprobleem**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Budget:**	100000						
2								
3	**variabelen**	**rendement**	**investering**		**restricties**			
4	shell	0,085			budget	0	<=	100000
5	esso	0,095			olie	0	<=	50000
6	dsm	0,060			chemie	0	<=	50000
7	akzo	0,075			obligaties	0	>=	0
8	stobl	0,045			risico	0	<=	0
9								
10	Max.opbr.	0						

Toelichting op tabel 1.7

- In de cellen A1 tot en met B8 staan de gegevens. De maximale opbrengst komt na oplossing te staan in cel B10. De optimale investering (in euro) die we in de diverse fondsen moeten doen, is na oplossen van het model te vinden in de cellen C4 tot en met C8.
- Het blok E3 tot en met H8 bevat de restricties. In tabel 1.8 is weergegeven hoe dat blok eruitziet als we in Excel de zogenoemde formulevorm activeren (het commando hiervoor is: <ctrl> +< t >).

Tabel 1.8 **Excel-model. Blok met restricties**

	E	F	G	H
3	**restricties**			
4	budget	=SOM(C4:C8)	<=	=B1
5	olie	=(C4+C5)	<=	=0,5*B1
6	chemie	=(C6+C7)	<=	=0,5*B1
7	obligaties	=C8	>=	=0,25*(C6+C7)
8	risico	=C5	<=	=0,55*(C4+C5)

Stap 5 Oplossing met behulp van Excel

Antwoordrapport

Het *antwoordrapport* dat Excel produceert na het activeren van de ‘Oplosser’ is weergegeven in tabel 1.9.

Toelichting op het antwoordrapport

- De maximale opbrengst is €7.975, zie cel E3, op een investering van €100.000. Het totale rendement dat WMF naar verwachting zal gaan behalen is dus bijna 8%, om precies te zijn 7,975%.
- De optimale beleggingsstrategie voor WMF is, zie de cellen E7 tot en met E11:
  – €22.500 beleggen in aandelen Shell;
  – €27.500 beleggen in aandelen Esso;

Tabel 1.9 **Antwoordrapport van het beleggingsprobleem**

	B	C	D	E	F	G
1	Doelcel					
2	**Cel**	**Naam**	**Oorspronkelijke waarde**	**Eindwaarde**		
3	$B$10	Max.opbr.	0	7975		
4						
5	Aanpasbare cellen					
6	**Cel**	**Naam**	**Oorspronkelijke waarde**	**Eindwaarde**		
7	$C$4	shell	0,00	22500,00		
8	$C$5	esso	0,00	27500,00		
9	$C$6	dsm	0,00	0,00		
10	$C$7	akzo	0,00	40000,00		
11	$C$8	stobl	0,00	10000,00		
12						
13	Restricties					
14	**Cel**	**Naam**	**Celwaarde**	**formule**	**Status**	**Speling**
15	$F$4	budget	100000	$F$4<=$H$4	Bindend	0
16	$F$5	olie	50000	$F$5<=$H$5	Bindend	0
17	$F$6	chemie	40000	$F$6<=$H$6	Niet-bindend	10000
18	$F$8	risico	27500	$F$8<=$H$8	Bindend	0
19	$F$7	obligaties	10000	$F$7>=$H$7	Bindend	0

– €40.000 beleggen in aandelen Akzo-Nobel;
– €10.000 beleggen in staatsobligaties.

Merk op dat het blijkbaar niet verstandig is om in aandelen DSM te beleggen. De waarde van de variabele DSM is immers gelijk aan nul.

- De chemierestrictie is de enige niet-bindende restrictie, zie cel F17. Er mocht hooguit €50.000 worden geïnvesteerd in chemie. In de optimale oplossing is er blijkbaar slechts €40.000 geïnvesteerd.
- Met enige fantasie zou je kunnen zeggen dat de chemierestrictie (evenals de olie- en de budgetrestricties overigens) een capaciteitsrestrictie is. Er is een capaciteit van €50.000 om te investeren. Deze capaciteit is dus niet geheel benut. De bezetting van deze capaciteit is 'slechts' 80 procent. De overige 'capaciteitssoorten' zijn vol benut. Het budget van €100.000 is dus ook in zijn geheel gebruikt om te beleggen.

Oefening 1.14
Bepaal nogmaals de optimale beleggingsstrategie als de risicobeperking op het kopen van aandelen Esso niet meer geldt.

Stap 6 Gevoeligheidsanalyse
In dit voorbeeld besteden we aandacht aan de volgende aspecten van de gevoeligheidsanalyse:

a gereduceerde kosten
b schaduwprijs van de budgetrestrictie
c rendement op Shell (dit is één van de coëfficiënten van de doelfunctie).

Het Excel-rapport betreffende de gevoeligheidsanalyse is weergegeven in tabel 1.10.

Tabel 1.10 **Gevoeligheidsrapport van het beleggingsprobleem**

	B	C	D	E	F	G	H
1	Aanpasbare cellen						
2			**Eind-**	**Gereduceerde**	**Coëfficiënt**	**Toegestane**	**Toegestane**
3	**Cel**	**Naam**	**Waarde**	**kosten**	**doelfunctie**	**toename**	**afname**
4	$C$4	shell	22500,00	0,000	0,085	0,010	0,048
5	$C$5	esso	27500,00	0,000	0,095	1E+30	0,010
6	$C$6	dsm	0,00	–0,015	0,06	0,015	1E+30
7	$C$7	akzo	40000,00	0,000	0,075	0,027	0,015
8	$C$8	stobl	10000,00	0,000	0,045	0,030	0,345
9							
10	Restricties						
11			**Eind-**	**Schaduw-**	**Rechterzijde**	**Toegestane**	**Toegestane**
12	**Cel**	**Naam**	**Waarde**	**prijs**	**restrictie**	**toename**	**afname**
13	$F$4	budget	100000	0,069	100000	12500	50000
14	$F$5	olie	50000	0,0215	50000	50000	12500
15	$F$6	chemie	40000	0	50000	1E+30	10000
16	$F$8	risico	27500	0,01	0	22500	27500
17	$F$7	obligaties	10000	0	0	50000	12500

Ad a Gereduceerde kosten
Als we in tabel 1.10 kijken naar de gereduceerde kosten, zien we dat die kosten nul zijn voor alle beslissingsvariabelen, behalve voor de variabele DSM. Voor die variabele zijn de gereduceerde kosten gelijk aan –0,015. Deze waarde betekent het volgende (vergelijk ook nog eens de intuïtieve oplossing voor LP-problemen in paragraaf 1.2.1).
Als het rendement op aandelen DSM 0,015 (× 100%) hoger zou zijn, dan zou het aantrekkelijk zijn om ook in aandelen DSM te investeren.

Ad b Schaduwprijs van de budgetrestrictie
De schaduwprijs van 0,069 betekent dat als we één euro meer te besteden hebben dan de €100.000 die we nu hebben, het rendement met €0,069 stijgt (dus in procenten: bijna 7% rendementstijging). We zien ook dat deze uitspraak geldig blijft binnen de range van 50.000 tot 112.500 euro. De toegestane toename is immers €12.500 en de toegestane afname is €50.000.

Oefening 1.15
a Wat betekent het dat de schaduwprijs van de chemierestrictie nul is?
b Interpreteer de schaduwprijs van 0,0215 voor de olierestrictie.

Ad c Rendement op Shell
Een van de coëfficiënten van de doelfunctie is het rendement op aandelen Shell. Geschat is dat dit rendement 8,5% is. Bekijken we de output, tabel 1.10, dan zien we dat de optimale beleggingsstrategie *niet* verandert, zolang het rendement op aandelen Shell inligt tussen 0,037 en 0,095 (de toegestane afname resp. toename is immers 0,048 resp. 0,01).

Oefening 1.16
Hoe gevoelig is de optimale oplossing met betrekking tot veranderingen in het rendement op Staatsobligaties?

1.2.6 Theoretisch intermezzo (mogelijke oplossingen bij lineaire programmering)

Niet alle LP-problemen hebben zulke nette oplossingen als de tot nu toe behandelde modellen. Er zijn LP-problemen die oneindig veel oplossingen hebben, of helemaal geen oplossing. Er zijn ook LP-problemen die een onbegrensde oplossing hebben. We illustreren en bespreken een en ander aan de hand van een drietal voorbeelden.

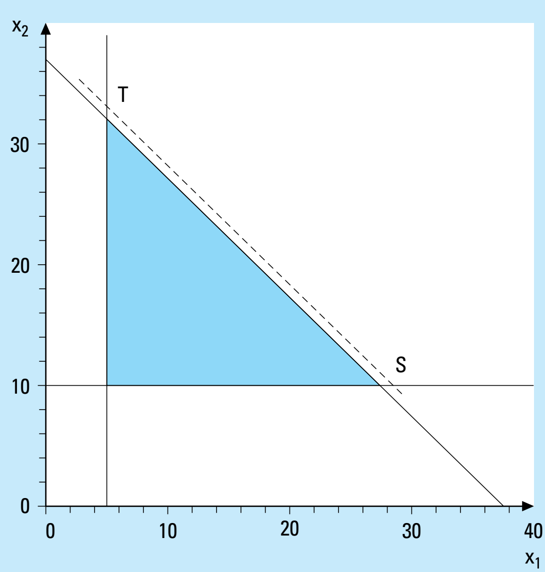
■ Voorbeeld 1.1
De mini-onderneming die verjaarskaarten en wenskaarten maakt, heeft opnieuw de kostprijzen berekend. Die kostprijzen blijken zodanig te zijn dat de winst op elke kaart die ze maakt 60 eurocent bedraagt. De afzetbeperkingen zijn onveranderd: elke week moeten minstens 5 verjaarskaarten en minstens 10 wenskaarten worden gemaakt. Ook de capaciteitsbeperking is niet veranderd. Het (aangepaste) LP-model ziet er nu als volgt uit:

Maximaliseer $w = 60x_1 + 60x_2$

m.b.t.	$4x_1 + 4x_2 \leq 150$	[capaciteitsbeperking]
	$x_1 \geq 5$	[afzet verjaarskaarten]
	$x_2 \geq 10$	[afzet wenskaarten]
	$x_1, x_2 \geq 0$	

De grafische oplossing is weergegeven in figuur 1.9.

Figuur 1.9 **Oneindig veel oplossingen**



Het toelaatbare gebied is weer gekleurd. De doelfunctie, als stippellijn getekend in figuur 1.9, blijkt nu evenwijdig te lopen aan de capaciteitsrestrictie. Dat wil zeggen dat naast het optimale punt S elk punt op de lijn TS ook optimaal is. Er zijn dus oneindig veel optimale oplossingen, elk met een maximale winst van 2250 eurocent.
In Excel wordt zo'n situatie niet expliciet aangegeven. Excel geeft één optimale oplossing.
Echter, bij bestudering van het gevoeligheidsrapport blijkt de schaduwprijs *van een bindende restrictie* toch gelijk aan nul te zijn. Dat betekent dat er nog meer optimale oplossingen zijn.

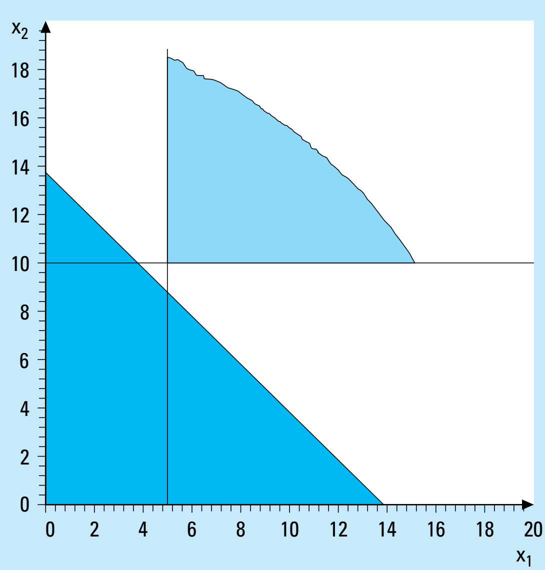
■ Voorbeeld 1.2

De mini-onderneming uit voorbeeld 1.1 heeft in een bepaalde week nog slechts 55 minuten beschikbaar om de kaarten te maken. De doelfunctie en de andere restricties blijven zoals in voorbeeld 1.1. Het LP-model ziet er nu als volgt uit:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Maximaliseer } w = 60x_1 + 60x_2 & & & \\
\text{m.b.t.} & 4x_1 + 4x_2 \leq & 55 & \text{[capaciteitsbeperking]} \\
 & x_1 \geq & 5 & \text{[afzet verjaarskaarten]} \\
 & x_2 \geq & 10 & \text{[afzet wenskaarten]} \\
 & x_1, x_2 \geq & 0 &
\end{array}
$$

Minimaal moeten x_1 en x_2 respectievelijk de waarde 5 en 10 krijgen. Als we deze waarden invullen in de capaciteitsbeperking, krijgen we: $4 \times 5 + 4 \times 10 \leq 55$. En dit is niet juist. Er kan dus nooit aan de capaciteitsrestrictie worden voldaan. Grafisch is de situatie weergegeven in figuur 1.10.

Figuur 1.10 **Geen optimale oplossing**



Met betrekking tot de afzetrestricties zou de oplossing moeten liggen in het lichtblauwe gebied. Maar met betrekking tot de capaciteitsrestrictie in het

donkerblauwe gebied. Een oplossing, zo die er is, zou in beide gebieden tegelijk moeten liggen. Dat kan niet.
Hier hebben we te maken met een LP-vraagstuk dat geen toelaatbare oplossing heeft, laat staan een optimale oplossing. In Excel wordt zo'n situatie netjes kenbaar gemaakt. Na het activeren van de 'Oplosser' komt dan de mededeling 'Geen werkbare oplossing' op het scherm te staan.

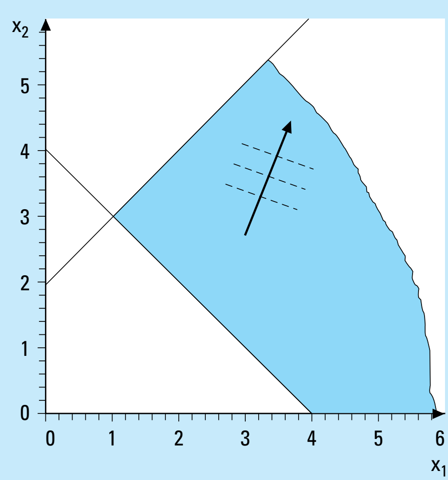
■ **Voorbeeld 1.3**
Theoretisch kan een LP-vraagstuk ook een onbegrensde oplossing hebben. Beschouw daartoe het volgende LP-vraagstuk:

Maximaliseer $z = 6x_1 + 16x_2$
m.b.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

In figuur 1.11 is de situatie grafisch weergegeven. De doelfunctie is voor drie waarden van z getekend, zie de stippellijnen. Het toelaatbare gebied is blauw gekleurd.

Figuur 1.11 **Onbegrensde oplossing**



De doelfunctie kan net zo ver naar rechts worden opgeschoven als we maar willen, zie de richting van de pijl in figuur 1.11. De bijbehorende waarde van de doelfunctie neemt dan ook onbegrensd toe. Excel geeft ook deze situatie netjes aan. Na het activeren van de 'Oplosser' komt de mededeling: 'De waarden voor 'celbepalen' convergeren niet'.

1.2.7 Reclamecampagne (geheeltalligheid bij lineaire programmering)

Continue variabelen

De uitkomsten van een LP-vraagstuk zijn meestal geen 'mooie' uitkomsten. Dat komt omdat de variabelen in een LP-vraagstuk zogenoemde *continue* variabelen zijn. Dat zijn variabelen die elke mogelijke (positieve) waarde kunnen aannemen. In de praktijk van alledag wordt de oplossing meestal afgerond tot gehele getallen. En vaak kan dat ook. Als de oplossing bijvoorbeeld luidt: maak 1158,33 eenheden van product A, ligt niemand er van wakker als die uitkomst wordt afgerond tot 1158 eenheden. Er zijn echter ook situaties te bedenken waar *geheeltalligheid* van de uitkomsten wel essentieel is en waar niet zonder meer mag worden afgerond naar de dichtstbij liggende geheeltallige oplossing. Daarvan behandelen we in deze paragraaf een voorbeeld.

Geheeltalligheid

Stap 1 Probleembeschrijving

Een projectontwikkelaar ziet wel brood in de bouw van een vakantiebungalowpark. De reclamecampagne voor dit project is in handen gegeven van de firma RECLA. Deze firma heeft onderzocht welke media er in aanmerking komen voor het plaatsen van advertenties en/of het maken van reclamespots en in welke mate de potentiële kopers via die media worden bereikt. Ook heeft RECLA uitgezocht wat de kosten van adverteren zijn. Deze gegevens zijn weergegeven in tabel 1.11.

Tabel 1.11 **Reclamegegevens**

Reclamemedium	**Aantal te bereiken kopers**	**Kosten per advertentie** (in euro's)
TV overdag	1000	2250
TV 's avonds	2000	3000
Nederlands dagblad	750	750
Volkskrant	1700	900
Radio	1200	1000

RECLA heeft van de projectontwikkelaar te horen gekregen dat voor de eerste maand een budget van 75.000 euro beschikbaar is. Verder moeten er minstens 13 tv-spots komen, waarvan minstens 7 in de avonduren. Er mag niet meer dan 38.000 euro (iets meer dan de helft) aan televisiereclame worden besteed. In de kranten mogen niet meer dan 25 advertenties worden gezet. Ten slotte moet het aantal radiospots minstens 10 zijn.
Welk mediakeuzeplan moet RECLA aanbevelen als het aantal te bereiken kopers zo groot mogelijk moet zijn?

Stap 2 Beslissingsvariabelen

Er moeten beslissingen worden genomen over het aantal tv- en radiospots en het aantal advertenties dat in de bladen moet worden gezet. Dat zijn dus vijf beslissingen. Als beslissingsvariabelen kiezen we daarom:

- To = aantal tv-spots overdag
- Ta = aantal tv-spots 's avonds
- Nd = aantal advertenties in het Nederlands Dagblad
- Vk = aantal advertenties in de Volkskrant
- Ra = aantal reclamespots op de radio.

Stap 3 Doelfunctie
Bij het in stap 2 gedefinieerde aantal spots/advertenties bereiken we in totaal 1000To + 2000Ta + 750Nd + 1700Vk + 1200Ra potentiële kopers. Dit aantal moet worden gemaximaliseerd. We noemen het aantal potentiële kopers voor het gemak ‘kopers’. De doelfunctie kan dan worden geschreven als:
Maximaliseer kopers = 1000To + 2000Ta + 750Nd + 1700Vk + 1200Ra

Stap 4 Restricties
Uit de probleembeschrijving valt af te leiden dat er in totaal vijf beperkende voorwaarden en eisen zijn. Alle vijf restricties schrijven we weer met behulp van de beslissingsvariabelen:
- Er is een budgetrestrictie. Deze is te schrijven als:
  $2250To + 3000Ta + 750Nd + 900Vk + 1000Ra \leq 75.000$
- Er is een eis met betrekking tot het totaal aantal tv-spots:
  $To + Ta \geq 13$
- Er is een eis met betrekking tot het aantal tv-spots in de avonduren:
  $Ta \geq 7$
- Er is een limiet aan de totale kosten van tv-reclame:
  $1500To + 3000Ta \leq 38.000$
- Er is een limiet aan het aantal advertenties in de kranten:
  $Nd + Vk \leq 25$
- Er is een eis met betrekking tot het aantal radiospots:
  $Ra \geq 10$

Verder eisen we natuurlijk ook dat alle beslissingsvariabelen niet-negatief zijn. De stappen 2 tot en met 4 resulteren in het volgende LP-model:

$$
\begin{array}{rrrrrrll}
 & \multicolumn{5}{l}{\text{Maximaliseer kopers} = 1000To + 2000Ta + 750Nd + 1700Vk + 1200Ra} & & \\
\text{m.b.t.} & 2250To + & 3000Ta + & 750Nd + & 900Vk + & 1000Ra & \leq 75\,000 & \text{[budget]} \\
 & To + & Ta & & & & \geq 13 & \text{[totaal aantal tv-spots]} \\
 & & Ta & & & & \geq 7 & \text{[tv-spots in de avonduren]} \\
 & 2250To + & 3000Ta & & & & \leq 38\,000 & \text{[kosten tv-reclame]} \\
 & & & Nd + & Vk & & \leq 25 & \text{[advertenties in kranten]} \\
 & & & & & Ra & \geq 10 & \text{[radio-spots]} \\
 & & & & \multicolumn{2}{r}{\text{alle variabelen}} & \geq 0 & \text{[positiviteit]}
\end{array}
$$

Stap 5 Oplossing met behulp van Excel
Het hiervoor geformuleerde wiskundig model (LP-model) kan weer worden opgelost met behulp van Excel. We maken daartoe het spreadsheet-model zoals weergegeven in tabel 1.12.

In deze tabel is de optimale oplossing, zie de cellen B12 tot en met B16 en cel B18, ook al weergegeven. Bij het ontwerpen van het spreadsheet-model zijn deze waarden natuurlijk nul.

Toelichting op het model in tabel 1.12
- De gegevens staan in het blok A1 tot en met C9.
- De beslissingsvariabelen staan in A11 tot en met B16; de waarde staat in B12 tot en met B16.
- De restricties staan in D11 t/m F17.

Tabel 1.12 **Spreadsheet-model van RECLA**

	A	B	C	D	E	F
1	**Gegevens**					
2		Aantal				
3	Reclame-	te bereiken	Kosten per			
4	medium	kopers	advertentie			
5	TV overdag	1000	2250			
6	TV 's avonds	2000	3000			
7	Nederlands Dagblad	750	750			
8	Volkskrant	1700	900			
9	Radio	1200	1000			
10						
11	**Besl. var**			**Restricties**		
12	To	1,33		75000	<=	75000
13	Ta	11,67		13	>=	13
14	Nd	0		11,67	>=	7
15	Vk	25		38000	<=	38000
16	Ra	12		25	<=	25
17				12	>=	10
18	**Kopers**	81566,67				

In tabel 1.13 staan de formules van de restricties.

Tabel 1.13 **Restricties**

	D	E	F
11	**Restricties**		
12	=C5*B12+C6*B13+C7*B14+C8*B15+C9*B16	<=	75000
13	=B12+B13	>=	13
14	=B13	>=	7
15	=C5*B12+C6*B13	<=	38000
16	=B14+B15	<=	25
17	=B16	>=	10

- De optimale oplossing ten slotte komt te staan in de cel B18 (in tabel 1.12).

De Excel-output, verkregen met behulp van de 'Oplosser', is weergegeven in tabel 1.14.

Stap 7 Bespreking van de oplossing
Het blijkt dat er in totaal 81.566,67 potentiële kopers worden bereikt met deze reclamecampagne. Er moeten dan onder andere 1,33 tv-spots overdag worden uitgezonden en 11,67 tv-spots 's avonds. Dat is natuurlijk niet mogelijk! Afronden naar de dichtstbijzijnde gehele getallen kan niet, want uit diezelfde oplossing blijkt dat de budgetrestrictie bindend is, dat betekent dus dat alle budget is opgebruikt. Dus voor die afronding is niet genoeg geld. Bij afronden naar beneden houden we

Tabel 1.14 **Excel-oplossing van de Media-campagne**

Cel	Naam	Oorspronkelijke waarde	Eind-waarde
$B$18	Kopers	0	81566,67

Aanpasbare cellen

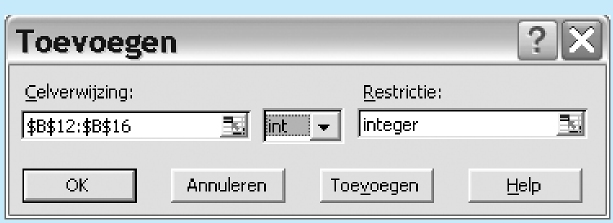
Cel	Naam	Oorspronkelijke waarde	Eind-waarde
$B$12	To	0	1,33
$B$13	Ta	0	11,67
$B$14	Nd	0	0
$B$15	Vk	0	25
$B$16	Ra	0	12

Restricties

Cel	Naam	Celwaarde	Formule	Status	Speling
$D$13	Aantal tv-spots	13	$D$13>=$F$13	Bindend	0
$D$16	Adv.in kranten	25	$D$16<=$F$16	Bindend	0
$D$14	Tv-spots avond	11,67	$D$14>=$F$14	Niet-bindend	4,67
$D$15	Tv-budget	38000	$D$15<=$F$15	Bindend	0
$D$12	Totaal budget	75000	$D$12<=$F$12	Bindend	0
$D$17	Radio-spots	12	$D$17>=$F$17	Niet-bindend	2

geld over, geld dat mogelijk door een ander (maar wel geheeltallig) mediaplan te kiezen toch nog beter had kunnen worden ingezet.
Feitelijk hadden we *van tevoren* moeten bedenken dat de optimale oplossing een geheeltallige oplossing *moet* zijn. En gelukkig kan dat ook worden aangegeven in Excel. We gaan daartoe als volgt te werk. In de ‘Oplosser’ van Excel gaan we een extra restrictie toevoegen: de restrictie namelijk dat alle beslissingsvariabelen gehele getallen moeten zijn. Daartoe moet het volgende scherm worden ingevuld, zie figuur 1.12.

Figuur 1.12 **Restrictie toevoegen**



In het linkerscherm bij **Celverwijzing:** komen de beslissingsvariabelen te staan. In het middelste scherm kiezen we de optie **int.** In het rechterscherm bij **Restrictie:** komt dan automatisch het woord ‘integer’ te staan.

Daarna lossen we het LP-model nog een keer op. We krijgen dan de oplossing zoals in tabel 1.15.

Tabel 1.15 **Geheeltallige oplossing van het mediaprobleem**

Cel	Naam	Oorspronkelijke waarde	Eind-waarde
$B$18	Kopers	81566,67	**81300**

Aanpasbare cellen

Cel	Naam	Oorspronkelijke waarde	Eind-waarde
$B$12	To	1,33	**4**
$B$13	Ta	22,67	**9**
$B$14	Nd	0	**0**
$B$15	Vk	25	**25**
$B$16	Ra	12	**14**

De optimale geheeltallige oplossing is aanmerkelijk anders dan we mogelijk zelf zouden hebben bedacht door af te ronden naar gehele getallen. Het verdient dan ook aanbeveling om de computer dat soort geheeltallige oplossingen te laten bepalen.

Opmerking
Het is in Excel niet mogelijk om een gevoeligheidsrapport te laten berekenen als er een geheeltallige oplossing moet worden berekend. Overigens, dat is voor de meeste software-pakketten te moeilijk!
Om deze reden is stap 6 overgeslagen.

1.3 Groenhouts optimalisatie van vervoerstromen

Het bedrijf Groenhout beschikt over een procédé waarmee zachthout op een milieuvriendelijke manier kan worden getransformeerd tot een product met de kwaliteit van hardhout. Het getransformeerde hout bevat geen milieuvervuilende toevoegingen en is voor minstens vijftien jaar beschermd tegen rot en verval. Het procédé van Groenhout is technologisch tamelijk geavanceerd, en het eindproduct is dan ook duurder dan natuurlijk hardhout. Om toch te kunnen concurreren met andere leveranciers is het voor Groenhout essentieel dat alle overige kosten van bedrijfsvoering zo laag mogelijk worden gehouden. Het blijkt dat het vervoer van hout één van de grootste kostenposten voor Groenhout is. Zowel de aanvoer van zachthout van groothandels naar productieplaats, als de afvoer van hardhout van productieplaats naar afnemers komt voor rekening van Groenhout. In de komende paragraaf onderzoeken we hoe we deze vervoerskosten kunnen minimaliseren. We analyseren hierbij concreet de volgende drie situaties:

- vervoer van zachthout van groothandels naar Groenhout, zie paragraaf 1.3.1;

- vervoer van hardhout van Groenhout naar afnemers, zie paragraaf 1.3.2;
- selectie nieuwe vestigingsplaats, zie paragraaf 1.3.3.

1.3.1 Transportprobleem: vervoer van groothandel naar Groenhout

Als eerste gaan we na wat voor Groenhout de goedkoopste manier is om aan het benodigde zachthout te komen.

Probleemomschrijving

Groenhout heeft drie productieplaatsen waar het zachthout wordt omgezet in hardhout: in Doetinchem, Emmen en Lokeren. Groenhout koopt haar zachthout in bij vijf groothandels. Deze groothandels melden iedere maand hoeveel zachthout ze in de door Groenhout gewenste kwaliteit kunnen leveren. Nadat Groenhout een bestelling heeft opgegeven, leveren de groothandels het zachthout zelf af bij de gewenste productieplaats. De groothandels brengen zowel de kostprijs van het hout als de vervoerskosten in rekening bij Groenhout. Omdat de kostprijs van zachthout grotendeels wordt bepaald door ontwikkelingen op de wereldmarkt, zijn de prijsverschillen die groothandels rekenen feitelijk de verschillen in transportkosten. Iedere maand moet Groenhout beslissen welke productieplaats welke hoeveelheden zachthout bij welke groothandel moet bestellen. Het criterium dat Groenhout gebruikt om deze beslissing te nemen, is simpelweg dat de totale kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Een dergelijke vraagstelling staat in de literatuur bekend onder de naam *transportprobleem* (transportation problem).

Transportprobleem

Om te beslissen wat de beste wijze van bestellen is, heeft Groenhout informatie nodig. Er moet worden uitgezocht hoe groot de vraag naar hout is in de verschillende productieplaatsen, hoeveel iedere groothandel kan leveren en welke prijzen de groothandels hiervoor in rekening brengen. Het is bij dit type probleem gebruikelijk om deze informatie in een zogenaamd *transporttableau* te plaatsen. Het tableau voor dit probleem is getoond in tabel 1.16.

Transporttableau

Tabel 1.16 **Transporttableau Groenhout**

Leveringskosten (euro per ton)	**Doetinchem**	**Emmen**	**Lokeren**	**Aanbod (ton)**
Groothandel 1	88	72	79	40
Groothandel 2	64	71	87	35
Groothandel 3	82	84	67	50
Groothandel 4	70	88	61	15
Groothandel 5	88	92	78	85
Vraag (ton)	30	58	42	

Voor iedere groothandel is weergegeven welke kosten ze rekenen in euro per ton geleverd zachthout per productieplaats. De laatste kolom bevat het aanbod aan zachthout voor iedere groothandel. De onderste regel bevat de vraag aan zachthout voor iedere productieplaats.

Beslissingsvariabelen

De bestelling wordt volledig gespecificeerd door aan te geven hoeveel ton zachthout van welke groothandel naar welke productieplaats gaat. Er zijn vijf groothandels en drie productieplaatsen. In totaal zijn dus $5 \times 3 = 15$ mogelijke transportstromen. We definiëren zo de vijftien beslissingsvariabelen $X_{i,j}$ als het aantal ton zachthout dat groothandel 'i' levert aan productieplaats 'j':

$X_{1,D}$: het aantal ton zachthout dat groothandel 1 aan Doetinchem levert;

$X_{2,D}$: het aantal ton zachthout dat groothandel 2 aan Doetinchem levert;

…;

$X_{1,E}$: het aantal ton zachthout dat groothandel 1 aan Emmen levert;

…;

$X_{5,L}$: het aantal ton zachthout dat groothandel 5 aan Lokeren levert.

Doelfunctie

Ieder van de vijftien mogelijke transportstromen brengt kosten met zich mee zoals beschreven in tabel 1.16. De kosten om bijvoorbeeld een hoeveelheid $X_{1,D}$ ton hout van groothandel 1 naar Doetinchem te vervoeren, zijn gelijk aan $88X_{1,D}$ euro. Het doel is om de kosten voor alle vijftien transportstromen tezamen zo laag mogelijk te maken. In formulevorm is deze eis te schrijven als:

Minimaliseer:

Kosten (euro) = $88X_{1,D} + 64X_{2,D} + 82X_{3,D} + \ldots + 84X_{3,E} + \ldots + 78X_{5,L}$

Restricties

De bestellingen moeten aan een aantal voorwaarden voldoen. Ten eerste kan bij een groothandel niet meer worden besteld dan deze kan leveren:

$X_{1,D} + X_{1,E} + X_{1,L} \leq 40$ ton [aanbod GH1];

$X_{2,D} + X_{2,E} + X_{2,L} \leq 35$ ton [aanbod GH2];

…;

$X_{5,D} + X_{5,E} + X_{5,L} \leq 85$ ton [aanbod GH5]

Ook moet bij iedere productieplaats precies de gewenste hoeveelheid zachthout worden afgeleverd:

$X_{1,D} + X_{2,D} + X_{3,D} + X_{4,D} + X_{5,D} = 30$ ton [vraag Doetinchem];

$X_{1,E} + X_{2,E} + X_{3,E} + X_{4,E} + X_{5,E} = 58$ ton [vraag Emmen];

$X_{1,L} + X_{2,L} + X_{3,L} + X_{4,L} + X_{5,L} = 42$ ton [vraag Lokeren].

Het is uiteraard niet mogelijk om 'negatieve' bestellingen te doen, dus alle vijftien beslissingsvariabelen moeten positief zijn:

$X_{1,D}, X_{2,D}, \ldots, X_{4,L}, X_{5,L} \geq 0$ [positiviteit].

Oplossing

Tabel 1.17 bevat een spreadsheet waarin het beschreven vraagstuk is geformuleerd. Na de bouw van de spreadsheet kunnen de beslissingsvariabelen, doelfunctie en restricties in de 'Oplosser' worden geplaatst. De restrictie op 'positiviteit' kan het handigst worden ingevoerd door op de knop 'Opties' (Options) te klikken, en vervolgens de mogelijkheid ‘Uitgaan van niet-negatief’ (Assume non-negative) aan te vinken. De door de ‘Oplosser’ gevonden waarden van de beslissingsvariabelen zijn in de cellen B15 tot en met D19 af te lezen. De kosten worden door de doelfunctie in cel B22 berekend als €8958.

Tabel 1.17 **Spreadsheet transportprobleem**

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**Vervoerskosten** (euro / ton)	Doetinchem	Emmen	Lokeren		**Aanbod** (ton)
3	Groothandel 1	88	72	79		40
4	Groothandel 2	64	71	87		35
5	Groothandel 3	82	84	67		50
6	Groothandel 4	70	88	61		15
7	Groothandel 5	88	92	78		85
8						
9	**Vraag** (ton)	30	58	42		
10						
11						
12	**Beslissingsvariabelen: vervoerde tonnen zachthout**					
13						
14		Doetinchem	Emmen	Lokeren		
15	Groothandel 1	0	40	0		
16	Groothandel 2	17	18	0		
17	Groothandel 3	0	0	40		
18	Groothandel 4	13	0	2		
19	Groothandel 5	0	0	0		
20						
21	**Doelfunctie: vervoerskosten** (euro)					
22		=SUMPRODUCT (B3:D7;B15:D19)				
23						
24	**Restricties: vraag en aanbod**					
25	Aanbod Groothandel 1		=B15+C15+D15	<=	=F3	ton
26	Aanbod Groothandel 2		=B16+C16+D16	<=	=F4	ton
27	Aanbod Groothandel 3		=B17+C17+D17	<=	=F5	ton
28	Aanbod Groothandel 4		=B18+C18+D18	<=	=F6	ton
29	Aanbod Groothandel 5		=B19+C19+D19	<=	=F7	ton
30	Vraag Doetinchem		=B15+B16+B17 +B18+B19	=	=B9	ton
31	Vraag Emmen		=C15+C16+C17 +C18+C19	=	=C9	ton
32	Vraag Lokeren		=D15+D16+D17 +D18+D19	=	=D9	ton
33	Positiviteit		Alle variab.	>=	0	

Ook kan de ‘Oplosser’ op de gebruikelijke manier antwoord- en gevoeligheidsrapporten genereren. Bij de volgende analyses refereren we aan gedeeltes uit deze rapporten.

Analyse
In de dagelijkse praktijk zijn er allerlei redenen waarom deze oplossing toch niet wenselijk of haalbaar is. Hierna bespreken we enkele scenario's waarin de gevonden oplossing óf nader moet worden bestudeerd, óf moet worden aangepast.

Scenario 1
Het is bijvoorbeeld mogelijk dat Groothandel 4 weigert de kleine hoeveelheid van 2 ton naar Lokeren te transporteren. Groothandel 4 zou de voorwaarde kunnen stellen dat alleen maar hoeveelheden van 5 ton of meer worden geleverd. Dit is een extra beperkende voorwaarde die nog niet in het probleem was opgenomen. We moeten dan in de spreadsheet de restrictie opnemen:

$X_{4,L} \geq 5$ ton [leveringsvoorwaarde GH4]

Met deze extra voorwaarde vindt de 'Oplosser' volstrekt andere vervoerstromen. Gunstig is dat de kosten met slechts €3 stijgen. Maar direct rijst een volgende vraag: in de nieuwe situatie zou Groothandel 3 slechts 3 ton aan Emmen moeten leveren. Als Groothandel 3 hier niet toe bereid is, moeten we weer een nieuwe restrictie aan het model toevoegen.

Scenario 2
Keren we terug naar de oorspronkelijke situatie, dus zonder de extra restrictie uit scenario 1. Het is mogelijk dat Lokeren op het punt staat grote orders te krijgen. Maar omdat er nog geen volledige zekerheid is, zitten de mensen in Lokeren te twijfelen hoeveel ton ze nu moeten bestellen. Een belangrijke vraag is dan wat de financiële consequenties zijn van een grotere of kleinere bestelling. Om deze vraag te beantwoorden is het nuttig om de schaduwprijs van de restrictie 'vraag Lokeren' op te zoeken. In tabel 1.18 is een deel van het gevoeligheidsrapport van de 'Oplosser' overgenomen.

Tabel 1.18 **Transportprobleem gevoeligheidsanalyse**

Cel	Naam	Eind-Waarde	Schaduw-prijs	Rechterzijde restrictie	Toegestane toename	Toegestane Afname
$C$25	Aanbod Groot-handel 1	40	−11	40	13	2
$C$26	Aanbod Groot-handel 2	35	−12	35	13	2
$C$27	Aanbod Groot-handel 3	40	0	50	1E+30	10
$C$28	Aanbod Groot-handel 4	15	−6	15	40	2
$C$29	Aanbod Groot-handel 5	0	0	85	1E+30	85
$C$30	Vraag Doetinchem	30	76	30	2	13
$C$31	Vraag Emmen	58	83	58	2	13
$C$32	Vraag Lokeren	42	67	42	10	40

De schaduwprijs blijkt gelijk te zijn aan €67. Dit betekent dus dat iedere ton zachthout die Lokeren méér bestelt, een kostenstijging van €67 teweegbrengt. (Evenzo dalen de kosten met €67 voor iedere ton die Lokeren minder bestelt!) Deze uitkomst is met een blik op de spreadsheet ook wel te begrijpen. Uit tabel 1.18 volgt dat alleen Groothandels 3 en 5 nog hout kunnen leveren. Hun respectievelijke tarieven zijn €67 en €78: de voorkeur gaat uiteraard uit naar de goedkoopste leverancier.
Uit de laatste twee kolommen blijkt dat deze schaduwprijs alleen geldt voor bestellingen tussen 52 (= 42 + 10) en 2 (= 42 – 40) ton. Wanneer Lokeren overweegt om bestellingen van meer dan 52 of minder dan 2 ton te doen, dan kan het optimale vervoerspatroon alleen worden gevonden door het lineair programma aan te passen en opnieuw op te lossen.

Scenario 3
In de beschreven situatie is het aanbod van zachthout royaal groter dan de vraag van Groenhout. Maar in een andere periode zou dit natuurlijk anders kunnen liggen. Gaan we voor een nieuwe periode uit van de gegevens uit tabel 1.19.

Tabel 1.19 **Vraag en aanbod scenario 3**

Vraag (ton)		**Aanbod** (ton)	
• Doetinchem	35	• Groothandel 1	20
• Emmen	62	• Groothandel 2	12
• Lokeren	43	• Groothandel 3	33
		• Groothandel 4	30
		• Groothandel 5	25
Totaal	140	Totaal	120

Wanneer deze aantallen van vraag en aanbod in de restricties zijn ingevoerd, kan de 'Oplosser' geen oplossing meer vinden. Wat moet Groenhout in dit geval doen? Uiteraard wil men zoveel mogelijk hout (het totale aanbod van 120 ton) bestellen. Maar wat is de goedkoopste manier om dit hout over de drie productieplaatsen te verdelen? Om deze vraag te beantwoorden, passen we de restricties als volgt aan.

Om alle 120 ton geleverd te krijgen, vervangen we in de aanbodrestricties het '<='-teken door het '='-teken:

$X_{1,D} + X_{1,E} + X_{1,L} = 20$ ton [aanbod GH1];
…;
$X_{5,D} + X_{5,E} + X_{5,L} = 25$ ton [aanbod GH5].

Om ervoor te zorgen dat een productieplaats door deze aanpassing niet teveel zachthout ontvangt, vervangen we in de vraagrestricties het '='-teken door het '≤'-teken:

$X_{1,D} + X_{2,D} + X_{3,D} + X_{4,D} + X_{5,D} \leq 35$ ton [vraag Doetinchem];
$X_{1,E} + X_{2,E} + X_{3,E} + X_{4,E} + X_{5,E} \leq 62$ ton [vraag Emmen];
$X_{1,L} + X_{2,L} + X_{3,L} + X_{4,L} + X_{5,L} \leq 43$ ton [vraag Lokeren].

Wanneer we deze aangepaste restricties in de 'Oplosser' invoeren, kan het goedkoopste vervoerspatroon worden bepaald. Tabel 1.20 bevat de gevonden beslissingsvariabelen. De conclusie is dus dat de goedkoopste manier om de 120 ton hout te bestellen is om Doetinchem en Lokeren volledig te bevoorraden, en om Emmen 20 ton minder te leveren.

Tabel 1.20 **Oplossing scenario 3**

	Doetinchem	Emmen	Lokeren
Groothandel 1	0	20	0
Groothandel 2	12	0	0
Groothandel 3	0	0	33
Groothandel 4	23	0	7
Groothandel 5	0	22	3

Scenario 4

Verschillende sets van beslissings-variabelen

In de meeste situaties is er één specifieke set van beslissingsvariabelen die de doelfunctie optimaliseert. Maar dit hoeft niet altijd het geval te zijn. In scenario 3 zagen we een situatie waarbij er géén oplossing was. Maar er zijn ook situaties waarbij er *verschillende sets van beslissingsvariabelen* zijn die tot dezelfde optimale doelfunctie leiden. De 'Oplosser' laat dit niet expliciet weten, dus moeten we hier zelf alert op zijn. Als voorbeeld passen we ons oorspronkelijke transporttableau zo aan, dat het eruitziet als in tabel 1.21.

Tabel 1.21 **Transporttableau scenario 4**

	Doetinchem	Emmen	Lokeren	Aanbod
Groothandel 1	88	72	79	40
Groothandel 2	64	70	87	35
Groothandel 3	82	83	67	50
Groothandel 4	71	88	61	15
Groothandel 5	88	92	78	85
Vraag	30	58	42	

Wanneer de kosten worden geminimaliseerd, kunnen er meerdere oplossingen optreden. Ga na dat voor beide oplossingen uit tabel 1.22 de kosten uitkomen op €8.953.

Om in te zien hoe er meerdere oplossingen kunnen ontstaan, is het handig om de grafische oplosmethode toe te passen op een probleem met twee beslissingsvariabelen. Het kan zo uitkomen dat de doelfunctie 'samenvalt' met een restrictie. Wanneer de optimale doelfunctie samenvalt met een hele rand van het toelaatbare gebied, dan zijn alle punten op dit lijnstuk gelijkwaardige oplossingen. Anderzijds vinden we één unieke oplossing indien de optimale doelfunctie slechts in een hoekpunt contact maakt met het toelaatbare gebied.

Tabel 1.22 **Dubbele oplossing scenario 4**

Oplossing 1	**Doetinchem**	**Emmen**	**Lokeren**
Groothandel 1	0	40	0
Groothandel 2	17	18	0
Groothandel 3	0	0	40
Groothandel 4	13	0	2
Groothandel 5	0	0	0

Oplossing 2	**Doetinchem**	**Emmen**	**Lokeren**
Groothandel 1	0	40	0
Groothandel 2	30	5	0
Groothandel 3	0	13	27
Groothandel 4	0	0	15
Groothandel 5	0	0	0

Ook in het geval van meer beslissingsvariabelen geldt dat er één oplossing is indien de doelfunctie slechts een enkel hoekpunt gemeen heeft met het toelaatbare gebied. Uit de gevoeligheidsanalyse is dit te achterhalen uit het feit dat de coëfficiënten van de doelfunctie wat mogen variëren zonder dat dit de oplossing verandert. Bekijken we het gevoeligheidsrapport in tabel 1.23.

Tabel 1.23 **Gevoeligheidsanalyse scenario 4**

Cel	**Naam**	**Eind-Waarde**	**Gereduceerde Kosten**	**Coëfficiënt Doelfunctie**	**Toegestane toename**	**Toegestane Afname**
$B$15	Groothandel 1 – Doetinchem	0	22	88	1E+30	22
$C$15	Groothandel 1 – Emmen	40	0	72	11	1E+30
$D$15	Groothandel 1 – Lokeren	0	23	79	1E+30	23
$B$16	Groothandel 2 – Doetinchem	17	0	64	11	0
$C$16	Groothandel 2 – Emmen	18	0	70	0	11
$D$16	Groothandel 2 – Lokeren	0	33	87	1E+30	33
$B$17	Groothandel 3 – Doetinchem	0	5	82	1E+30	5
$C$17	Groothandel 3 – Emmen	0	0	83	1E+30	0
$D$17	Groothandel 3 – Lokeren	40	0	67	0	6
$B$18	Groothandel 4 – Doetinchem	13	0	71	0	11
$C$18	Groothandel 4 – Emmen	0	11	88	1E+30	11
$D$18	Groothandel 4 – Lokeren	2	0	61	6	0
$B$19	Groothandel 5 – Doetinchem	0	11	88	1E+30	11
$C$19	Groothandel 5 – Emmen	0	9	92	1E+30	9
$D$19	Groothandel 5 – Lokeren	0	11	78	1E+30	11

Het gevoeligheidsrapport toont dat er coëfficiënten zijn waarvoor de toegestane toename of de toegestane afname gelijk is aan nul. Dit is het bewijs dat er meerdere oplossingen bestaan. De overeenkomstige beslissingsvariabelen ($X_{2,D}$, $X_{2,E}$, $X_{3,E}$, $X_{3,L}$, $X_{4,L}$ en $X_{4,D}$) kunnen dus variëren zonder dat dit de waarde van de doelfunctie verandert.

Natuurlijk kunnen we de beslissingsvariabelen niet onbeperkt laten variëren. We moeten wel aan de restricties blijven voldoen. De restricties in een transportprobleem zijn de eisen van vraag en aanbod. Het transporttableau is een geschikt hulpmiddel om relaties tussen beslissingsvariabelen en restricties te onderzoeken. Tabel 1.24 bevat het tableau met de oorspronkelijke oplossing uit de spreadsheet. Voor iedere rij en kolom zijn de totale hoeveelheid verplaatste tonnen bepaald.

Tabel 1.24 **Transporttableau met oplossingen scenario 4**

	Doetinchem	**Emmen**	**Lokeren**	**Totaal**
Groothandel 1	0	40	0	40
Groothandel 2	17 (+ ?)	18 (– ?)	0	35
Groothandel 3	0	0 (+ ?)	40 (– ?)	40
Groothandel 4	13 (– ?)	0	2 (+ ?)	15
Groothandel 5	0	0	0	0
Totaal	30	58	42	

De plussen en minnen tussen de haakjes refereren aan alternatieve oplossingen. Voor een alternatieve oplossing moeten de rij- en kolomtotalen in tact blijven. Als we bijvoorbeeld $X_{2,D}$ met 1 ton ophogen, dan moet $X_{2,E}$ met 1 ton omlaag, omdat in die regel het totale tonnage op 35 moet blijven. Maar als $X_{2,E}$ met 1 ton omlaag gaat, dan moet $X_{3,E}$ met 1 ton omhoog om het kolomtotaal op 58 te houden. Zo zien we dat we het uiteindelijke tonnage in een gesloten kring door het tableau heen kunnen verschuiven. En het bijzondere is dat zo'n verschuiving netto geen verandering in vervoerskosten met zich meebrengt, zoals tabel 1.25 aantoont.

Tabel 1.25 **Toegestane verschuivingen in transporttableau**

Variabele	**Verandering in variabele**	**Verandering in Vervoerskosten**
$X_{2,D}$	+1	+64
$X_{2,E}$	–1	–70
$X_{3,E}$	+1	+83
$X_{3,L}$	–1	–67
$X_{4,L}$	+1	+61
$X_{4,D}$	–1	–71
Totaal:		0

Door steeds andere tonnages door het tableau te verschuiven, kunnen we nu nieuwe oplossingen genereren. De enige beperking die geldt, is dat de te vervoeren hoeveelheden altijd positief moeten zijn. Dit betekent dat de hoeveelheid die kan worden doorgeschoven groter moet zijn dan 0 ton (ten gevolge van $X_{3,E}$) en kleiner moet zijn dan 13 ton (ten gevolge van $X_{4,D}$).

Tot slot kunnen we nog opmerken dat het transporttableau ook nog andere handige eigenschappen heeft. Zo is het mogelijk op basis van het transporttableau alternatieve optimaliseringstrategieën te vinden voor het transportprobleem. Zulke methodes, zoals de *Stepping Stone methode*, leveren in het geval van problemen met veel beslissingsvariabelen zelfs aanmerkelijk minder rekenwerk dan de Simplexmethode zoals de 'Oplosser' die gebruikt.

Stepping Stone methode

1.3.2 Verschepingsprobleem: vervoer van Groenhout naar afnemers

Het geproduceerde hardhout moet natuurlijk naar de afnemers worden vervoerd. Andermaal zijn de kosten voor rekening van Groenhout en moet er worden bedacht wat de goedkoopste manier van vervoer is.

Probleemomschrijving

Toen Groenhout nog een jong en klein bedrijfje was, werd het hardhout rechtstreeks naar individuele afnemers getransporteerd. Maar in de loop van de tijd zijn de aantallen afnemers en de hoeveelheden besteld hout toegenomen. Uit het oogpunt van efficiëntie heeft Groenhout het vervoer als volgt georganiseerd. Op twee centrale plaatsen, in Antwerpen en in Utrecht, worden magazijnen gehuurd en als overslagpunt ingericht. Hardhout uit Doetinchem en Emmen wordt naar Utrecht vervoerd; het hout uit Lokeren wordt naar het overslagpunt in Antwerpen vervoerd. Vanuit deze overslagpunten gaat alles naar de afnemers toe. Er kan uiteraard ook hout tussen de overslagpunten onderling worden vervoerd. De vraag hoe onder dergelijke omstandigheden tegen minimale kosten het vervoer kan worden gerealiseerd heet in de vakliteratuur een *verschepingsprobleem* (transshipment problem).

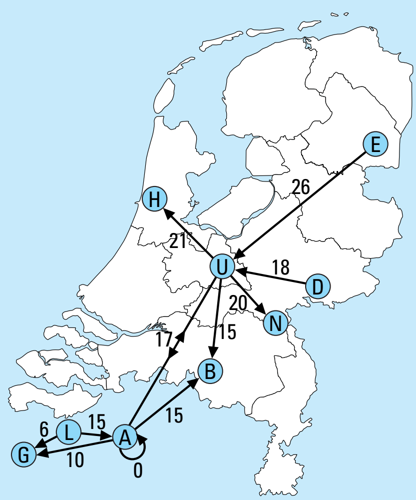
Verschepings-probleem

In een bepaalde week heeft Groenhout bestellingen van afnemers uit Antwerpen, Breda, Gent, Haarlem en Nijmegen. De afnemer uit Antwerpen is tevens de verhuurder van de magazijnruimte. Het overslagpunt en de afnemer in Antwerpen zitten dus op dezelfde locatie.
Een verdere bijzonderheid is dat via een bevriende vervoerder het gemakkelijk te regelen is om de afnemer in Gent rechtstreeks vanuit de productieplaats Lokeren te bevoorraden.
Uit eigen ervaring en uit gesprekken met de afdeling Logistiek van de branchevereniging van Groenhout zijn schattingen van de vervoerskosten per ton hout gemaakt. Deze zijn in figuur 1.13 weergegeven. In de betreffende periode zijn vraag en aanbod van hardhout als vermeld in tabel 1.26.

Tabel 1.26 **Vraag en aanbod verschepingsprobleem**

Vraag (ton)		**Aanbod** (ton)	
Antwerpen	12	Doetinchem	20
Breda	12	Emmen	12
Gent	15	Lokeren	33
Haarlem	16		
Nijmegen	5		

Figuur 1.13 **Vervoerskosten hardhout naar afnemers**



Alle gegevens kunnen worden samengevat in het transporttableau van tabel 1.27.

Tabel 1.27 **Transporttableau verschepingsprobleem**

Leveringskosten (euro per ton)	**Magazijn Antwerpen**	**Magazijn Utrecht**	**Winkel Antwerpen**	**Winkel Breda**	**Winkel Gent**	**Winkel Haarlem**	**Winkel Nijmegen**	**Aanbod** (ton)
Productieplaats Doetinchem		18						30
Productieplaats Emmen		26						25
Productieplaats Lokeren	15				6			20
Magazijn Antwerpen		17	0	15	10			0
Magazijn Utrecht	17			15		21	20	0
Vraag (ton)	0	0	12	12	15	16	5	

Beslissingsvariabelen

De vervoerstromen worden volledig gespecificeerd door aan te geven hoeveel ton hout van welke productieplaatsen via welke magazijnen naar welke afnemers gaat. In het kaartje en in het transporttableau staan alle mogelijke routes aangegeven. Alles bij elkaar zijn er twaalf transportstromen en dus definiëren we twaalf beslissingsvariabelen: X_{ij} = aantal ton hout dat van plaats ‘i’ aan plaats ‘j’ wordt geleverd. Uitgeschreven zijn de variabelen:

$X_{D,U}$: aantal ton dat Doetinchem aan Utrecht levert;
$X_{E,U}$: aantal ton dat Emmen aan Utrecht levert;
$X_{L,A}$: aantal ton dat Lokeren aan Antwerpen levert;
$X_{L,G}$: aantal ton dat Lokeren aan Gent (afnemer) levert;
$X_{U,A}$: aantal ton dat Utrecht aan Antwerpen levert;
$X_{A,U}$: aantal ton dat Antwerpen aan Utrecht levert;

$X_{A,A}$: aantal ton dat Antwerpen (magazijn) aan Antwerpen (afnemer) levert;
$X_{A,G}$: aantal ton dat Antwerpen aan Gent levert;
$X_{A,B}$: aantal ton dat Antwerpen aan Breda levert;
$X_{U,B}$: aantal ton dat Utrecht aan Breda levert;
$X_{U,H}$: aantal ton dat Utrecht aan Haarlem levert;
$X_{U,N}$: aantal ton dat Utrecht aan Nijmegen levert.

Doelfunctie
Doel is weer om de transportkosten te minimaliseren. De totale kosten zijn de optelling van de twaalf kosten voor de individuele routes. Uit de gegevens volgt dat de vervoerskosten worden gegeven door de volgende formule.
Minimaliseer:

$$\text{Vervoerskosten} = 18X_{D,U} + 26X_{E,U} + 15X_{L,A} + 6X_{L,G} + 17X_{U,A} + 17X_{A,U} + 0X_{A,A} + 10X_{A,G} + 15X_{A,B} + 15X_{U,B} + 21X_{U,H} + 20X_{U,N}$$

Restricties
De bestellingen moeten natuurlijk weer aan een aantal voorwaarden voldoen. Ten eerste kan een productieplaats alleen maar leveren wat geproduceerd is. Dus:

$X_{D,U} \leq 30$ ton [aanbod Doetinchem]
$X_{E,U} \leq 25$ ton [aanbod Emmen]
$X_{L,A} + X_{L,G} \leq 20$ ton [aanbod Lokeren].

De magazijnen worden alleen voor overslag gebruikt. Voor iedere periode moeten aanvoer en afvoer in een overslagpunt dus even groot zijn. De aanvoer naar Antwerpen is gelijk aan $X_{L,A} + X_{U,A,}$ de afvoer uit Antwerpen is gelijk aan $X_{A,U} + X_{A,A} + X_{A,G} + X_{A,B\,.}$ Stellen we deze aan elkaar gelijk dan vinden we:

$$X_{L,A} + X_{U,A} = X_{A,U} + X_{A,A} + X_{A,G} + X_{A,B}$$

Oftewel:

$$X_{L,A} + X_{U,A} - X_{A,U} - X_{A,A} - X_{A,G} - X_{A,B} = 0 \quad \text{[overslag Antwerpen]}$$

Evenzo geldt voor overslagpunt Utrecht:

$$X_{A,U} + X_{D,U} + X_{E,U} - X_{U,A} - X_{U,B} - X_{U,H} - X_{U,N} = 0 \quad \text{[overslag Utrecht]}$$

Verder moet iedere afnemer precies de bestelde hoeveelheid hout ontvangen:

$X_{A,A} = 12$ ton [vraag Antwerpen];
$X_{A,B} + X_{U,B} = 12$ ton [vraag Breda];
$X_{L,G} + X_{A,G} = 15$ ton [vraag Gent];
$X_{U,H} = 16$ ton [vraag Haarlem];
$X_{U,N} = 5$ ton [vraag Nijmegen].

Tot slot is het vervoer van negatieve hoeveelheden hout uiteraard niet mogelijk, en dus moeten alle twaalf beslissingsvariabelen positief zijn:

$$X_{D,U}, X_{E,U}, \ldots, X_{U,N} \geq 0 \quad \text{[positiviteit]}$$

Oplossing
Wanneer voorgaand vraagstuk in een spreadsheet wordt geplaatst, levert de 'Oplosser' het antwoordrapport uit tabel 1.28. De vervoerskosten voor deze oplossing zijn €1700.

Tabel 1.28 **Antwoordrapport verschepingsprobleem**

Naam	Oorspronkelijke waarde	Eindwaarde
Productieplaats Doetinchem – Magazijn Utrecht	0	30
Productieplaats Emmen – Magazijn Utrecht	0	10
Productieplaats Lokeren – Magazijn Antwerpen	0	5
Productieplaats Lokeren – Winkel Gent	0	15
Magazijn Antwerpen – Magazijn Utrecht	0	0
Magazijn Antwerpen – Winkel Antwerpen	0	12
Magazijn Antwerpen – Winkel Breda	0	0
Magazijn Antwerpen – Winkel Gent	0	0
Magazijn Utrecht – Magazijn Antwerpen	0	7
Magazijn Utrecht – Winkel Breda	0	12
Magazijn Utrecht – Winkel Haarlem	0	16
Magazijn Utrecht – Winkel Nijmegen	0	5

Analyse
We analyseren de oplossingen van het verschepingsprobleem nu nader.

Scenario 1
De gebruikte vervoerskosten zijn eigenlijk niet meer dan grove schattingen. We onderzoeken daarom de gevolgen van de onzekerheid van deze kosten op de totale vervoerskosten. Het rapport van de gevoeligheidsanalyse voor de coëfficiënten van de doelfunctie is weergegeven in tabel 1.29.

Tabel 1.29 **Gevoeligheidsrapport coëfficiënten doelfunctie**

Naam	Eind-Waarde	Geredu-ceerde Kosten	Coëfficiënt doelfunctie	Toege-stane toename	Toege-stane afname
Productieplaats Doetinchem – Magazijn Utrecht	30	0	18	8	1E+30
Productieplaats Emmen – Magazijn Utrecht	10	0	26	1E+30	8
Productieplaats Lokeren – Magazijn Antwerpen	5	0	15	28	19
Productieplaats Lokeren – Winkel Gent	15	0	6	19	1E+30
Magazijn Antwerpen – Magazijn Utrecht	0	34	17	1E+30	34
Magazijn Antwerpen – Winkel Antwerpen	12	0	0	1E+30	1E+30
Magazijn Antwerpen – Winkel Breda	0	17	15	1E+30	17
Magazijn Antwerpen – Winkel Gent	0	19	10	1E+30	19
Magazijn Utrecht – Magazijn Antwerpen	7	0	17	1E+30	17
Magazijn Utrecht – Winkel Breda	12	0	15	17	1E+30
Magazijn Utrecht – Winkel Haarlem	16	0	21	1E+30	1E+30
Magazijn Utrecht – Winkel Nijmegen	5	0	20	1E+30	1E+30

Groenhout onderzoekt eerst de vervoerskosten op het traject Doetinchem-Utrecht. Vervoerskosten vormen de coëfficiënten uit de doelfunctie, en dus kunnen we uit de tabel hierover informatie inwinnen. Uit tabel 1.29 blijkt dat het optimale vervoerspatroon ongewijzigd blijft zolang de kosten met niet meer dan 8 euro per ton toenemen, of met meer dan 1E+30 euro per ton afnemen. Vertaald betekent dit dat de kosten mogen variëren tussen de 0 en 26 euro per ton. (Een grotere afname is wiskundig wel toegestaan, maar negatieve vervoerskosten zijn in deze context natuurlijk betekenisloos). Ook al blijven de vervoerstromen onveranderd bij zo'n prijswijziging, de totale kosten veranderen natuurlijk wel. Wanneer bijvoorbeeld de kosten met 3 euro per ton toenemen, dan stijgen de totale kosten met 90 euro omdat er 30 ton van Doetinchem naar Utrecht wordt getransporteerd.

100%-regel

Een tweede kostenonderzoek van Groenhout betreft een recente stijging van de wegenbelasting in België. Als gevolg hiervan stijgen de vervoerskosten Lokeren-Gent met 3 euro/ton, Lokeren-Antwerpen met 4 euro/ton en Antwerpen-Gent met 3 euro/ton. De vraag is nu of Groenhout in deze gewijzigde kosten het transport op een andere manier moet gaan organiseren. We kunnen deze vraag beantwoorden door de *100%-regel* toe te passen. Voor ieder traject berekenen we de verhouding van de prijsstijging en de maximaal toegestane prijsstijging, zie tabel 1.30.

Tabel 1.30 **100%-regel vervoerskosten**

Traject	Prijsstijging	Toegestane toename	Verhouding	
Lokeren Gent	+3	19		3/19 = 0,158
Lokeren Antwerpen	+4	28		4/28 = 0,143
Antwerpen Gent	+3	1E+30		3/(1E + 30) = 0
			Totaal	**0,301**

Het blijkt dat de optelling van alle verhoudingen uitkomt op 0,301. Omdat dit minder dan 1 is, kan Groenhout concluderen dat het gebruikte vervoerspatroon nog steeds optimaal is.

Scenario 2

In de oorspronkelijke situatie wordt de winkel in Breda bevoorraad vanuit Utrecht. Levering vanuit Antwerpen is wel mogelijk, maar dit is blijkbaar duurder. Groenhout wil nu weten onder welke omstandigheden levering vanuit Antwerpen goedkoper wordt.

Gereduceerde kosten

Het antwoord op deze vraag is te geven door gebruik te maken van de *gereduceerde kosten*. (De term 'gereduceerde kosten' wordt algemeen gebruikt, ook voor grootheden die feitelijk geen kosten zijn, maar in andere eenheden – zoals hier euro/ton – worden uitgedrukt.) Uit tabel 1.29 lezen we af dat de coëfficiënt van $X_{A,B}$ gelijk is aan 15 en dat de gereduceerde kosten gelijk zijn aan 17. Dit betekent dus dat de vervoerskosten met 17 euro/ton moeten dalen voordat in de optimale situatie de beslissingsvariabele $X_{A,B}$ niet langer gelijk is aan nul.

Een prijsdaling van 17 euro/ton is uiteraard niet mogelijk: de vervoerskosten op het traject Antwerpen-Breda zouden dan uitkomen op 15 – 17 = –2 euro/ton. Maar een prijsdaling op het traject Antwerpen-Breda heeft hetzelfde effect als een prijsstijging op het traject Utrecht-Breda. We kunnen dus ook concluderen dat vervoer van Antwerpen naar Breda lonend wordt op het moment dat de kosten op het traject Utrecht-Breda met meer dan 17 euro/ton stijgen.

Dit resultaat is ook anderszins uit tabel 1.29 af te lezen. We zien dat voor de variabele $X_{U,B}$ de toegestane toename van de vervoerskosten gelijk is aan 17 euro/ton. Dit betekent dat de waarde van $X_{U,B}$ pas verandert bij een prijsstijging van 17 euro/ton. Ga na dat indien de vervoerskosten precies 32 euro/ton zijn, er weer meerdere oplossingen zijn. De totale kosten veranderen niet bij de volgende wijziging van de beslissingsvariabelen:

$X_{A,B}$	+1
$X_{U,B}$	–1
$X_{U,A}$	+1.

Opmerking
Zoals eerder opgemerkt kunnen afrondingen van de 'Oplosser' een enkele keer storend werken. Dit is zo'n geval. Wanneer de vervoerskosten Utrecht-Breda op 32 euro/ton worden geplaatst, kan het gevoeligheidsrapport voor de coëfficiënt van $X_{E,U}$ verschillende toegestane toenames en afnames bevatten. Aangetroffen resultaten zijn ondermeer 96389896655,2173 en 0, als ook 24,51963805 en 8. Beide combinaties zijn onjuist! De correcte waarden voor de toegestane toename en afname zijn 1E+30 en 8.
De juistheid van de laatste waarden kan worden beredeneerd door naar de verschillende vervoerskosten te kijken. Hoe hoog de vervoerskosten ook worden, het hout uit Emmen is in Utrecht nodig om aan de gestelde vraag te voldoen. Er zijn geen – en dus ook geen goedkopere – alternatieven. Anderzijds, als de vervoerskosten Emmen-Utrecht lager worden dan de vervoerskosten Doetinchem-Utrecht, dan wordt het gunstiger om Utrecht te bevoorraden vanuit Emmen. Dit laatste is het geval wanneer de vervoerskosten afnemen met 8 euro/ton.

Dit alles is een belangrijke waarschuwing. De 'Oplosser' is niet onfeilbaar (en andere software-pakketten zijn dit ook niet). Computers maken soms rekenfouten, en het is altijd aan de gebruiker om de gevonden resultaten te controleren. Een belangrijk hulpmiddel hierbij is om de getallen te interpreteren in de context van het specifieke vraagstuk.

Scenario 3
We kunnen achteraf constateren dat de gevonden oplossing redelijk 'voor de hand ligt'. Door het relatief kleine aantal winkels en routes is de keuze nogal beperkt. Dit verandert natuurlijk naarmate het aantal variabelen toeneemt. Veronderstel bijvoorbeeld dat er nog een nieuwe late bestelling doorkomt. Een winkel in Eindhoven wil ook nog 8 ton bestellen. Het hout kan zowel vanuit Antwerpen (16 euro/ton) als vanuit Utrecht (19 euro/ton) worden aangevoerd.

In het lineair programma moeten dan de volgende aanpassingen worden gemaakt:

Beslissingsvariabelen
Introduceer de nieuwe variabelen:
$X_{A,E}$: aantal ton dat Antwerpen aan Eindhoven levert;
$X_{U,E}$: aantal ton dat Utrecht aan Eindhoven levert.

Doelfunctie
Voeg aan de bestaande formule de term '$16X_{A,E} + 19X_{U,E}$' toe.
Minimaliseer: Vervoerskosten = $18X_{D,U} + \ldots + 20X_{U,N} + 16X_{A,E} + 19X_{U,E}$.

Restricties
Maak de volgende aanpassingen:
$X_{L,A} + X_{U,A} - X_{A,U} - X_{A,A} - X_{A,G} - X_{A,B} - X_{A,E} = 0$ [overslag Antwerpen];
$X_{A,U} + X_{D,U} + X_{E,U} - X_{U,A} - X_{U,B} - X_{U,H} - X_{U,N} - X_{U,E} = 0$ [overslag Utrecht].
En voeg toe:

$X_{A,E} + X_{U,E} = 8$ ton [vraag Eindhoven]

Wanneer dit probleem wordt opgelost, blijkt dat er vergeleken met de vorige situatie 8 ton meer van Emmen naar Utrecht gaat, en dat deze 8 ton vanuit Utrecht rechtstreeks naar Eindhoven gaat.

1.3.3 Locatieprobleem: selectie nieuwe vestigingsplaats

Groenhout voorziet in de nabije toekomst een verdere groei van de omzet. Uitbreiding van capaciteit in de bestaande faciliteiten is niet meer mogelijk, en dus is de vraag of het verstandig is om in een nieuwe plaats een productiefaciliteit te openen.

Probleemomschrijving
Alvorens zo'n beslissing te nemen worden alle kosten en baten zorgvuldig in kaart gebracht. Extra kosten zijn de bouw van de nieuwe faciliteit, de jaarlijkse productiekosten en ook de bijkomende vervoerskosten. De extra baten ontstaan uiteraard uit de grotere hoeveelheid hout die kan worden verkocht. Uitgaande van prognoses van de toekomstige vraag aan hardhout is het mogelijk om met een lineair programma kosten en baten voor verschillende scenario's te berekenen. Zo'n berekening is voor Groenhout waardevolle input bij het nemen van de beslissing. De vraag waar een nieuwe productiefaciliteit moet worden gebouwd om tot een zo goed mogelijk bedrijfsresultaat te komen, staat in de vakliteratuur bekend als een *locatieprobleem* (location problem).

Locatieprobleem

Groenhout overweegt om een nieuwe productiefaciliteit te openen in Rotterdam of in Tilburg. Er zijn diverse onderzoeken uitgevoerd om tot betrouwbare gegevens te komen waarop de beslissing moet worden gebaseerd. De relevante gegevens zijn in tabel 1.31 weergegeven.

De laatste twee kolommen bevatten de ramingen van de jaarlijkse vaste kosten voor de nieuw te bouwen faciliteiten en de bijhorende jaarlijkse capaciteit. Verder is ervan uitgegaan dat al het hardhout wordt getransporteerd naar de overslagplaatsen in Antwerpen en Utrecht. Om een zo

Tabel 1.31 **Gegevens locatieprobleem**

Vervoerskosten (euro/ton)	**Magazijn Antwerpen**	**Magazijn Utrecht**	**Capaciteit** (ton/jaar)	**Vaste kosten** (euro/jaar)
Productieplaats Doetinchem	25	18	5000	vast
Productieplaats Emmen	40	26	3000	vast
Productieplaats Lokeren	15	38	4000	vast
Productieplaats Tilburg	22	19	4000	85000
Productieplaats Rotterdam	18	14	5000	110000
Vraag (ton/jaar)	6000	8500		

volledig mogelijk inzicht te krijgen is vervoer van iedere productieplaats naar ieder magazijn in principe mogelijk. De geschatte vervoerskosten zijn weergegeven, alsmede ook de prognose van de jaarlijkse vraag naar hardhout in Antwerpen en Utrecht.
Duidelijk is dat aan de geprognosticeerde vraag van 6000 + 8000 ton niet kan worden voldaan door de drie bestaande productieplaatsen. De vraag is vervolgens welke nieuwe productieplaats moet worden geopend om tegen zo laag mogelijke kosten wél aan de vraag te voldoen.

Beslissingsvariabelen

De vaste jaarlijkse kosten van Doetinchem, Emmen en Lokeren liggen vast. Hiervoor is dus geen beslissingsvariabele nodig. De jaarlijkse kosten voor Tilburg en Rotterdam zijn niet vast. Deze kosten zijn juist afhankelijk van het al dan niet openen van een nieuwe faciliteit. Hiervoor introduceren we de twee *binaire variabelen* y_T en y_R:

Binaire variabelen

$y_T = 0$ betekent dat er géén faciliteit in Tilburg komt;
$y_T = 1$ betekent dat er wel een faciliteit in Tilburg wordt geopend;
$y_R = 0$ betekent dat er géén faciliteit in Rotterdam komt;
$y_R = 1$ betekent dat er wel een faciliteit in Rotterdam wordt geopend.

Het openen van een nieuwe faciliteit heeft alleen maar zin als de transportkosten hierdoor worden verlaagd. De transportkosten worden bepaald door de getransporteerde hoeveelheden tussen de verschillende locaties. Dit levert de volgende tien beslissingsvariabelen op: x_{DA}, x_{DU}, x_{EA}, x_{EU}, x_{LA}, x_{LU}, x_{TA}, x_{TU}, x_{RA}, x_{RU}, gedefinieerd als:
x_{DA} = aantal ton dat van Doetinchem naar Antwerpen wordt vervoerd;
x_{LU} = aantal ton dat van Lokeren naar Utrecht wordt vervoerd;
enzovoort.

Doelfunctie

Er zijn twee typen kosten, namelijk de vaste kosten van de nieuwe faciliteit(en), en het vervoer van de productieplaatsen naar de magazijnen. Deze zijn als volgt in de beslissingsvariabelen uit te drukken:
Vaste kosten = $85\,000y_T + 110\,000y_R$
Vervoerskosten = $25x_{DA} + 18x_{DU} + \ldots + 14x_{RU}$

Het uiteindelijke doel is om de combinatie van deze kosten zo laag mogelijk te houden:
Minimaliseer: Totale kosten = $85\,000y_T + 110\,000y_R + 25x_{DA} + 18x_{DU} + \ldots$

Restricties

De nevenvoorwaarden waarmee Groenhout te maken heeft, hebben betrekking op de beperkte capaciteit van iedere productieplaats en de vraag naar hout in beide overslagpunten.

Voor productieplaatsen Doetinchem, Emmen en Lokeren geldt dat de jaarlijkse afgevoerde hoeveelheid hardhout minder moet zijn dan de capaciteit:

$x_{DA} + x_{DU} \leq 5000$ ton [capaciteit Doetinchem]
$x_{EA} + x_{EU} \leq 3000$ ton [capaciteit Emmen]
$x_{LA} + x_{LU} \leq 4000$ ton [capaciteit Lokeren].

Voor Tilburg geldt eenzelfde voorwaarde indien hier daadwerkelijk een productiefaciliteit komt:

$x_{TA} + x_{TU} \leq 4000$ ton [als Tilburg *wel* productieplaats wordt]

Maar als er geen faciliteit wordt gebouwd, is er uiteraard geen capaciteit en dus ook geen afvoer van hout:

$x_{TA} + x_{TU} \leq 0$ ton [als Tilburg *geen* productieplaats wordt]

Met behulp van de binaire variabele y_T kunnen deze twee regels worden samengevoegd als:

$x_{TA} + x_{TU} \leq 4000y_T$ ton

Door alle variabelen aan de linkerkant van de ongelijkheid te plaatsen vinden we:

$x_{TA} + x_{TU} - 4000y_T \leq 0$ ton [capaciteit Tilburg]

Op dezelfde manier vinden we voor Rotterdam:

$x_{RA} + x_{RU} - 5000y_R \leq 0$ ton [capaciteit Rotterdam]

Vervolgens bekijken we de vraag naar hout in de overslagpunten. De naar Antwerpen en Utrecht vervoerde hoeveelheden hout moeten gelijk zijn aan de geprognosticeerde vraag:

$x_{DA} + x_{EA} + x_{LA} + x_{TA} + x_{RA} = 6000$ ton [vraag Antwerpen]
$x_{DU} + x_{EU} + x_{LU} + x_{TU} + x_{RU} = 8500$ ton [vraag Utrecht]

Uiteraard zijn alle vervoerde hoeveelheden positieve getallen:

$x_{DA}, x_{EA}, x_{RU} \geq 0$ [positiviteit]

De beslissingsvariabelen y_T en y_R zijn nog specifieker, zij kunnen alleen 0 en 1 zijn:

$y_T, y_R = 0, 1$ [binariteit]

Oplossing

Voor de oplossing van dit vraagstuk kan de spreadsheet uit tabel 1.32 worden gebruikt. De restrictie [positiviteit] kan het best in de 'Oplosser' worden ingevoerd door via 'Opties' de mogelijkheid 'Uitgaan van niet-negatief' aan te vinken. De restrictie [binariteit] daarentegen moet in het 'Oplosser'-hoofdmenu rechtstreeks onder 'restricties' worden ingevoerd. De door 'Oplosser' berekende optimale waarden van de beslissingsvariabelen zijn in de spreadsheet getoond. De totale kosten in deze situatie komen uit op €351.000.

Het advies is dus om in Rotterdam een nieuwe faciliteit te bouwen. We zien dat dan meteen ook de volledige capaciteit van Rotterdam wordt gebruikt, maar dat in Emmen slechts 500 van de mogelijke 3000 ton wordt geproduceerd!

Tabel 1.32

	A	B	C	D	E	F
1	**Vervoerskosten (euro / ton)**	Antwerpen	Utrecht		**Capaciteit (ton/jaar)**	**Kosten (euro/jaar)**
2	Doetinchem	25	18		5000	vast
3	Emmen	40	26		3000	vast
4	Lokeren	15	38		4000	vast
5	Tilburg	22	19		4000	85000
6	Rotterdam	18	14		5000	110000
7						
8		**Vraag** (ton/jaar)	6000	8500		
9						
10	**Beslissingsvariabelen**					
11	**Opening (0 = nee, 1 = ja)**			**Vervoer** (ton/jaar)	Antwerpen	Utrecht
12	Tilburg	0		Doetinchem	0	5000
13	Rotterdam	1		Emmen	0	500
14				Lokeren	4000	0
15				Tilburg	0	0
16				Rotterdam	2000	3000
17	**Doelfunctie**					
18	Kosten opening (euro)	=B12*F5+B13*F6				
19	Kosten vervoer (euro)	=SOMPRODUCT (B2:C6;E12:F16)				
20	Kosten totaal (euro)	=B18+B19				
21						
22	**Restricties**					
23	Capaciteit Doetinchem	=E12+F12	<=	=E2		
24	Capaciteit Emmen	=E13+F13	<=	=E3		
25	Capaciteit Lokeren	=E14+F14	<=	=E4		
26	Capaciteit Tilburg	=E15+F15–B12*E5	<=	0		
27	Capaciteit Rotterdam	=E16+F16–B13*E6	<=	0		
28	Vraag Antwerpen	=SOM(E12:E16)	=	=B8		
29	Vraag Utrecht	=SOM(F12:F16)	=	=C8		
30	Positiviteit	X i j	>=	0		
31	Binariteit	yT, yR	binair			

Analyse

Ook hier zijn allerlei redenen waarom deze oplossing toch niet wenselijk of haalbaar is. Hierna bespreken we weer enkele scenario's waarin de gevonden oplossing óf nader moet worden bestudeerd óf moet worden aangepast.

Scenario 1

De voorkeur voor Rotterdam boven Tilburg heeft behalve met de vervoerskosten natuurlijk ook te maken met de vaste jaarlijkse kosten. Als de jaarlijkse kosten in Tilburg lager zouden uitvallen, zou het voordeliger kunnen worden om in deze plaats een nieuwe productiefaciliteit te bouwen. Een relevante vraag is dan: hoeveel goedkoper zou Tilburg moeten zijn? Met andere woorden: wanneer alle andere gegevens onveranderd blijven, hoe laag moeten de vaste jaarlijkse kosten in Tilburg dan worden opdat Tilburg de goedkopere vestigingsplaats wordt?

Omdat de vaste kosten een coëfficiënt in de doelfunctie zijn, zouden we willen kijken naar de betreffende gevoeligheidsanalyse. Dit is echter niet mogelijk. Voor lineaire programma's met geheeltallige of binaire beslissingsvariabelen is het niet (of nauwelijks) mogelijk om een gevoeligheidsanalyse uit te voeren. De 'Oplosser' geeft desgevraagd ook aan zo'n rapport niet te kunnen leveren. Het enige wat ons rest is om handmatig allerlei verschillende waarden in te voeren en steeds opnieuw om een oplossing te vragen. Na enig gezoek vinden we dan dat Tilburg de voorkeur krijgt boven Rotterdam als de vaste lasten in Tilburg liggen ergens tussen €80.000 en €81.000.

Scenario 2

Tot nu toe hebben we alleen de kosten geminimaliseerd. Maar we krijgen een beter beeld van de situatie wanneer we ook de winst van de verkoop van hout meerekenen. Veronderstel dat per ton hout €26 wordt verdiend. Met de aanvullingen op de spreadsheet uit tabel 1.32 wordt in cel F20 het netto resultaat berekend, zie tabel 1.33.

Tabel 1.33 **Aanvulling op spreadsheet van tabel 1.32**

Cel	Omschrijving	Formule
F9	Winst per ton hout	26
D20	Totale winst alle hout	=SUM(E12:F16)*F9
F20	Netto resultaat	=D20–B20

Na aanpassing van de doelfunctie in de 'Oplosser' (maximaliseer F20) vinden we dat er een netto resultaat van €26.000 wordt geboekt. We kunnen ons nu afvragen hoeveel winst er per ton hout moet worden gemaakt om een positief netto resultaat te halen. Het antwoord kan worden gevonden door verschillende waarden in cel F9 in te vullen. Het blijkt dat voor een winst van €24,21 een positief resultaat wordt bereikt. Ongeacht de opbrengst van het hout blijven de waarden van de beslissingsvariabelen hetzelfde als in de oorspronkelijke berekening.

Scenario 3

In het vorige scenario hebben we de vraag naar hout als een harde restrictie gebruikt waaraan per se moest worden voldaan. Maar het zou misschien wel zo kunnen zijn dat we meer geld kunnen verdienen door wat minder te leveren dan door een nieuwe productiefaciliteit te openen. Om dit te onderzoeken maken we een aanpassing in de restricties [vraag Antwerpen] en [vraag Utrecht]. In plaats van te eisen dat de vraag precies gelijk is aan 6000 respectievelijk 8500 ton, eisen we nu dat de vraag kleiner of gelijk is dan deze aantallen. De winst per ton hout stellen we weer op €26. Wanneer deze veranderingen in de 'Oplosser' zijn ingevoerd vinden we een heel andere oplossing:

- Er wordt geen nieuwe faciliteit gebouwd.
- Doetinchem levert de hele capaciteit 5000 ton aan Utrecht.
- Lokeren levert de hele capaciteit van 4000 ton aan Antwerpen.
- Emmen levert helemaal niets.

De doelfunctie berekent een resultaat van €84.000! Dit scenario is in de realiteit ongetwijfeld niet haalbaar. Groenhout levert slechts 9000 ton terwijl er een totale capaciteit van 14 500 ton is. Uit de opgebouwde relaties met afnemers vloeien natuurlijk leveringsplichten voort. Ook kan de productiefaciliteit in Emmen niet zomaar worden gesloten. Om een realistischer beeld te krijgen moeten zulke praktische verplichtingen als extra restricties worden opgenomen.

1.4 Energeens optimalisatie van productieprocessen

Het bedrijf Energeen is actief in de bouwwereld. Energeen produceert een grote variëteit aan bouwmaterialen, van isolatiemateriaal tot wand- en vloerplaten tot complete prefab elementen. Al deze producten zijn zowel qua sterkte, verwerkbaarheid en isolerend vermogen van topkwaliteit. Energeen maakt al haar producten zelf in een eigen werkplaats. Een aantal grondstoffen wordt volgens een geheim ‘recept’ gemengd en verwerkt tot eindproducten. Energeen heeft diverse flexibele productielijnen waar die producten kunnen worden gemaakt waarnaar op dat moment vraag is. Behalve in productie is Energeen sinds kort ook actief in het ontwerpen van gebouwen voor klanten. Een nieuwe opgezette afdeling kan volgens de specificaties van de klant een gebouw op maat ontwerpen.
De productie- en ontwerpactiviteiten zijn beide kostbaar qua gebruikte faciliteiten en materialen. Om de klant toch een redelijke prijs te kunnen berekenen is het dus essentieel om de beschikbare middelen zo efficiënt mogelijk in te zetten. In deze paragraaf proberen we dat voor de volgende drie situaties te bewerkstelligen:

- een mengprobleem: productie isolerende wandpanelen, zie paragraaf 1.4.1;
- een maximale stroomprobleem: capaciteit netwerk koelwaterleidingen, zie paragraaf 1.4.2;
- een toewijzingsprobleem: ontwerp gebouw uit prefab elementen, zie paragraaf 1.4.3.

1.4.1 Mengprobleem: productie isolerende wandpanelen

Een winstgevend product voor Energeen zijn isolerende wandpanelen die in nieuwbouw in de spouwmuren worden geplaatst. We onderzoeken hoe deze zo goedkoop mogelijk kunnen worden geproduceerd.

Probleemomschrijving
De wandpanelen worden uit verschillende grondstoffen samengesteld. Allereerst worden de grondstoffen in een bepaalde verhouding gemengd. Dit mengsel wordt vervolgens in mallen gegoten. Deze mallen gaan dan de oven in, om het mengsel te laten uitharden. Na nog enkele nabehandelingen zijn de panelen geschikt voor verkoop. De eigenschappen van de wandpanelen worden vooral bepaald door de mengverhouding van het beslag. In de praktijk bestaan veel meer situaties waarin een optimale mengverhouding moet worden gevonden. Het is een standaardvraagstuk in het vakgebied van het lineair programmeren, en staat in de vakliteratuur bekend onder de naam *mengprobleem* (blending problem).

Mengprobleem

Voor het mengsel waaruit de panelen worden gemaakt, worden vijf grondstoffen gebruikt. Om de beschrijving te versimpelen hanteren we niet de officiële terminologie, maar noemen we de grondstoffen simpelweg A, B, C, D en E.
De bouwindustrie heeft normen opgelegd aan isolatiemateriaal voor wat betreft isolerend vermogen, brandveiligheid, stevigheid, giftigheid van bestanddelen, enzovoort. De panelen van Energeen moeten uiteraard aan deze normen voldoen. Energeen vertaalt deze normen als voorwaarden waaraan de mengverhoudingen van de grondstoffen moeten voldoen. Deze voorwaarden zijn:

1. Om voldoende isolerend vermogen te hebben, moeten de panelen ten minste 15% grondstof A bevatten.
2. Om de toxiciteit van de panelen te beperken, mogen ze niet meer dan 5% grondstof B bevatten.
3. Om voldoende isolerend vermogen te hebben, moeten grondstoffen B en C tezamen minstens 20% van het totale gewicht uitmaken.
4. Om de panelen de benodigde stevigheid te geven, moet de hoeveelheid grondstof D tussen de 30% en 40% liggen.
5. In het kader van de brandveiligheid mag de hoeveelheid E niet boven de 40% uitkomen.
6. Om bij het uitharden een stevige buitenkant te krijgen moet het mengsel ten minste 20% E bevatten.

Energeen stelt zich als doel het mengsel zo goedkoop mogelijk te maken. Een mal bevat in totaal 2 ton mengsel. Per grondstof gelden de prijzen uit tabel 1.34.

Tabel 1.34 **Grondstofprijzen**

Grondstof	**Prijs** (euro per ton)
A	220
B	80
C	120
D	180
E	110

Beslissingsvariabelen
De samenstelling van het mengsel kan uiteraard worden beschreven door aan te geven welk gewicht van welke grondstof bij elkaar zijn gevoegd. Daarom gebruiken we de beslissingsvariabelen:

X_A = aantal ton grondstof A in mengsel
X_B = aantal ton grondstof B in mengsel
…
X_E = aantal ton grondstof E in mengsel

Doelfunctie
Het doel is om panelen te produceren die voldoen aan alle normen tegen een zo laag mogelijke prijs. De doelfunctie is daarom:

Minimaliseer: Prijs = $220X_A + 80X_B + 120X_C + 180X_D + 110X_E$

Restricties
Energeen kan met haar mallen twee ton product per keer maken. Het gewicht van het mengsel is uiteraard gelijk aan de som van de gewichten van alle bestanddelen. Dit levert de voorwaarde:

$$X_A + X_B + X_C + X_D + X_E = 2 \qquad \text{[totaal ABCDE]}$$

De normen waaraan de panelen moeten voldoen leveren de overige restricties voor dit vraagstuk. De eerste voorwaarde, aangaande het isolatievermogen, is in formulevorm te schrijven als:

$$\frac{X_A}{X_A + X_B + X_C + X_D + X_E} \geq 0{,}15$$

In deze notatie is de voorwaarde echter onbruikbaar in een lineair programma. Omdat er wordt gedeeld door beslissingsvariabelen, is de formule niet lineair. Maar de formule is gelukkig lineair te maken door kruiselings te vermenigvuldigen. We vinden dan:

$$X_A \geq 0{,}15(X_A + X_B + X_C + X_D + X_E) \qquad \text{[fractie A>]}$$

Pas na deze herschrijving kan de restrictie in de 'Oplosser' (of in een willekeurig andere oplosmethode) worden gebruikt. Ook de voorwaarde op toxiciteit kan als een lineaire formule worden geschreven.
De voorwaarde:

$$\frac{X_B}{X_A + X_B + X_C + X_D + X_E} \leq 0{,}05$$

leidt tot de restrictie:

$$X_B \leq 0{,}05\ (X_A + X_B + X_C + X_D + X_E\ ) \qquad \text{[fractie B<]}$$

Evenzo kunnen we de overige voorwaarden op de samenstelling van het beslag door kruiselings vermenigvuldigen schrijven als:

$$\begin{array}{ll} X_B + X_C \geq 0{,}20(X_A + X_B + X_C + X_D + X_E) & \text{[fractie BC>]} \\ X_D \geq 0{,}30(X_A + X_B + X_C + X_D + X_E) & \text{[fractie D>]} \\ X_D \leq 0{,}40(X_A + X_B + X_C + X_D + X_E) & \text{[fractie D<]} \\ X_E \geq 0{,}20(X_A + X_B + X_C + X_D + X_E) & \text{[fractie E>]} \\ X_E \leq 0{,}40(X_A + X_B + X_C + X_D + X_E) & \text{[fractie E<]} \end{array}$$

Tot slot leggen we de restrictie op dat alle fracties vanzelfsprekend positieve getallen moeten zijn:

$$X_A, X_B, X_C, X_D, X_E \geq 0 \qquad \text{[positiviteit]}$$

Oplossing
De spreadsheet in tabel 1.35 bevat het lineaire programma om de optimale mengverhouding te bepalen. De spreadsheet is zo opgezet dat wanneer de specificaties in de rechterbovenhoek worden veranderd, de restricties van het lineaire programma meteen mee veranderen. In figuur 1.14 is het 'Oplosser'-menu getoond waarmee het vraagstuk kan worden opgelost. De restrictie over positiviteit is niet in de spreadsheet van tabel 1.35 opgenomen; deze moet dus in het 'Oplosser'-menu via Opties > Uitgaan van niet-negatief worden toegevoegd. De door de 'Oplosser' gevonden optimale hoeveelheden van de grondstoffen zijn in tabel 1.35 in cellen B10 tot en met B14 af te lezen. In cel B17 worden de minimale kosten berekend als €295.

Tabel 1.35 **Spreadsheet productie wandpanelen**

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Prijzen**	(euro/ton)		**Menging**	>=	<=	=
2	A	220		totaal ABCDE			2
3	B	80		fractie A	0,15		
4	C	120		fractie B		0,05	
5	D	180		fractie BC	0,2		
6	E	110		fractie D	0,3	0,4	
7				fractie E	0,2	0,4	
8							
9	**Beslissingsvariabelen** (ton)						
10	A	0,3					
11	B	0,1					
12	C	0,3					
13	D	0,6					
14	E	0,7					
15							
16	**Doelfunctie** (euro)						
17	Kosten	=SOMPRODUCT (B2:B6;B10:B14)					
18							
19	**Restricties**						
20	totaal ABCDE	=SOM(B10:B14)	=	=G2			
21	Fractie A>	=B10	>=	=E3*SOM(B10:B14)			
22	Fractie B<	=B11	<=	=F4*SOM(B10:B14)			
23	Fractie BC>	=B11+B12	>=	=E5*SOM(B10:B14)			
24	Fractie D>	=B13	>=	=E6*SOM(B10:B14)			
25	Fractie D<	=B13	<=	=F6*SOM(B10:B14)			
26	Fractie E>	=B14	>=	=E7*SOM(B10:B14)			
27	Fractie E<	=B14	<=	=F7*SOM(B10:B14)			
28							

Figuur 1.14 **'Oplosser'-menu voor spreadsheet uit model 1.35**

Analyse
In de praktijk moet bij de oplossing van een vraagstuk als dit altijd worden geanalyseerd wat nou precies de randvoorwaarden zijn waarbinnen het probleem moet opgelost. De uiteindelijke uitkomst is afhankelijk van een flink aantal factoren: de specificaties waaraan het mengsel moet voldoen, de kostprijzen van de grondstoffen, de soorten en hoeveelheden grondstoffen die Energeen in voorraad heeft, welke productielijnen Energeen in welke periode beschikbaar heeft, de winstmarge die op een bepaalde order kan worden behaald, enzovoort. Het effect van een aantal van deze factoren analyseren we nu nader.

Scenario 1
In voorgaande berekening zijn we ervan uitgegaan dat alle grondstoffen ruim voorradig waren. Maar dit hoeft natuurlijk niet altijd het geval te zijn. Uit de zojuist gevonden oplossing blijkt dat 0,7 ton van grondstof E is gebruikt. Maar veronderstel nu dat Energeen op een bepaald moment slechts kan beschikken over 0,5 ton E. Hoeveel 'beslag' met welke samenstelling moet dan worden gemaakt?
De beperkte hoeveelheid E legt een extra beperking op. Omdat we uiteraard alle E wel willen gebruiken, stellen we als nieuwe restrictie:

$X_E = 0{,}5$ [totaal E]

Na toevoeging van deze restrictie aan de spreadsheet kunnen we met de 'Oplosser' het lineaire programma opnieuw oplossen. We vinden dan als nieuwe samenstelling:

$X_A = 0{,}3;\ X_B = 0{,}1;\ X_C = 0{,}5;\ X_D = 0{,}6;\ X_E = 0{,}5$

De prijs van dit mengsel bedraagt €297.

We zijn gewend om veranderingen in restricties te analyseren met behulp van een gevoeligheidsanalyse. In dit geval lukt dit echter niet. Een algemeen kenmerk van alle mengproblemen is dat een gevoeligheidsanalyse van de restricties geen zinvolle informatie oplevert. Dit komt doordat de relevante grootheden *fracties* zijn en geen *hoeveelheden*. Hoeveelheden komen doorgaans als enige grootheid in het rechterlid van een restrictie te staan, maar fracties worden altijd met beslissingsvariabelen vermenigvuldigd. De berekeningen in de gevoeligheidsanalyse zijn specifiek gericht op één onafhankelijke grootheid in dit rechterlid. Daarom zijn de berekende schaduwprijzen, toegestane toenames en afnames in het gevoeligheidsrapport geen betekenisvolle grootheden. Voor meer informatie zie ook bijlage 1, de paragraaf over de 'Oplosser'.

Scenario 2
Er zijn allerlei omstandigheden denkbaar – binnen en buiten Energeen – die de ideale mengverhouding kunnen beïnvloeden. Zo zullen met enige regelmaat de kostprijzen van de grondstoffen veranderen. Bij welke prijsverandering moet nu welke verandering in het mengsel worden aangebracht?
Het antwoord op deze vraag volgt uit de gevoeligheidsanalyse op de coëfficiënten van de doelfunctie. Tabel 1.36 bevat een deel van het gevoeligheidsrapport dat de 'Oplosser' heeft gegenereerd uit de spreadsheet van tabel 1.35.

De gezochte informatie staat in de kolommen 'Toegestane toename' en 'Toegestane afname'. De eerste regel uit tabel 1.36 bijvoorbeeld geeft

Tabel 1.36 **Gevoeligheidsrapport**

Cel	Naam	Eind-waarde	Gereduceerde kosten	Coëfficiënt doelfunctie	Toegestane toename	Toegestane afname
\$B\$10	A	0,3	0	220	1E+30	110
\$B\$11	B	0,1	0	80	40	1E+30
\$B\$12	C	0,3	0	120	1E+30	10
\$B\$13	D	0,6	0	180	1E+30	70
\$B\$14	E	0,7	0	110	10	1E+30

informatie over het effect van variatie van de kosten van grondstof A (weergegeven als 'Coëfficiënt doelfunctie'). Uit de tabel lezen we af dat de eerder gevonden mengverhouding niet moet worden aangepast zolang de kosten van A niet meer toenemen dan 1E+30 of niet meer afnemen dan 110. Wanneer de 'Oplosser' het getal 1E+30 genereert, wordt hiermee bedoeld 'onbegrensd' of 'oneindig'. De conclusie is daarom dat de samenstelling van het mengsel pas hoeft te worden aangepast als de prijs van grondstof A met meer dan 110 euro/ton daalt. Let wel: deze uitspraak gaat over de *samenstelling* van het mengsel. De *kostprijs* van het mengsel verandert natuurlijk *altijd* wanneer een grondstof in prijs verandert. De veranderde prijs kan gewoon met de formule van de doelfunctie worden uitgerekend. Het gevoeligheidsrapport geeft geen informatie over wat het ideale mengsel is indien de prijs van A inderdaad met meer dan 100 euro/ton daalt. Om deze vraag te beantwoorden moet het lineaire programma met de nieuwe gegevens nog een keer opnieuw worden doorgerekend.
Prijsveranderingen van de andere grondstoffen kunnen op dezelfde manier worden geanalyseerd. Het is goedkoper om de samenstelling van het mengsel aan te passen indien: de prijs van B met meer dan 40 euro/ton stijgt, de prijs van C met meer dan 10 euro/ton daalt, de prijs van D met meer dan 70 euro/ton daalt of de prijs van E met meer dan 10 euro/ton toeneemt.

Voorgaande getallen zijn te gebruiken in de gevallen waarbij één grondstof van prijs verandert. In werkelijkheid worden natuurlijk vaak meerdere prijzen tegelijk aangepast. Om te beslissen of het mengproces moet worden veranderd, kan dan de 100%-regel worden gebruikt. In tabel 1.37 is een specifieke prijsverandering geanalyseerd.

De grondstoffen stijgen in prijs met respectievelijk 12, 10, 6, 0 en 8 euro/ton. Per grondstof wordt de verhouding bepaald van de prijsstijging en de toegestane toename zoals die in het gevoeligheidsrapport is berekend. Uiteindelijk blijkt de optelling van alle verhoudingen uit te komen op 1,05. Zou dit getal onder de 1 uitgekomen zijn, dan zouden we de mengverhouding niet aan willen passen. Nu de som van de verhoudingen boven de 1 uitkomt is de conclusie dat het misschien – maar niet zeker! – goedkoper is om het mengsel te wijzigen. Om zekerheid te krijgen moet het lineair programma opnieuw worden doorgerekend met de nieuwe grondstofprijzen.

Tabel 1.37 **100%-regel: prijsverandering meerdere grondstoffen**

Grondstof	Prijsstijging	Toegestane toename	Verhouding
A	12	1E+30	12/1E+30 = 0
B	10	40	10/40 = 0,25
C	6	1E+30	6/1E+30 = 0
D	0	1E+30	0/1E+30 = 0
E	8	10	8/10 = 0,8
			Totaal = 1,05

Scenario 3
Een relevante vraag kan ook zijn hoe de oplossing van het vraagstuk verandert wanneer de eisen aan de samenstelling van het mengsel veranderen. In het bijzonder willen we graag weten hoe gevoelig de oplossing is voor veranderingen in de fracties. Deze fracties verschijnen in het lineaire programma als coëfficiënten van restricties. Het blijkt dat zo'n gevoeligheidsanalyse wiskundig gezien tamelijk lastig is. Veel software-pakketten voor lineair programmeren, waaronder ook de 'Oplosser' uit Excel, bieden geen informatie over zulke gevoeligheden.

Het enige alternatief is dan het lineaire programma voor verschillende waarden van de restricties op te lossen. Veronderstel bijvoorbeeld dat als gevolg van nieuwe milieunormen op het gebied van toxiciteit de fractie B niet hoger dan drie procent mag zijn. De nieuwe mengverhouding is dan te vinden door in de spreadsheet van tabel 1.35 in cel F4 de waarde 0,03 in te voeren. De 'Oplosser' kan vervolgens de goedkoopste samenstelling berekenen als:
$X_A = 0{,}30$; $X_B = 0{,}06$; $X_C = 0{,}34$; $X_D = 0{,}60$; $X_E = 0{,}70$
De prijs van dit mengsel bedraagt €296,60.

Zo'n analyse is wat te vergemakkelijken door alle betreffende fracties in een apart blok in de spreadsheet (cel D1 tot en met G7) te plaatsen. Wanneer de formules van alle restricties naar cellen in dit blok verwijzen, hoeven deze formules nooit te worden aangepast. Het is dan alleen maar een kwestie van keer op keer de 'Oplosser' toepassen op variërende waarden van de fracties.

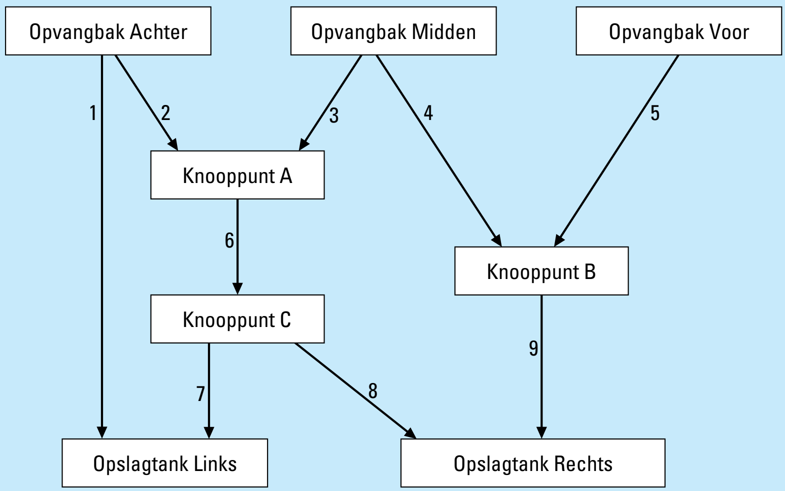
1.4.2 Maximale stroom-probleem: capaciteit netwerk koelwaterleidingen

Bij de productie van een type prefab element moeten de elementen na een behandeling in de oven snel worden afgekoeld. Hiervoor gebruikt Energeen sproeiers die de prefab elementen met water besprenkelen. Uit het oogpunt van zowel kosten als milieu-aspecten wil Energeen zo zuinig mogelijk met dit koelwater omgaan.

Probleemomschrijving
Langs de productielijnen is een systeem van sproeikoppen en opvangbakken geïnstalleerd. Door gestage uitbreiding van de productielijnen

is er in de loop der jaren een hele wirwar van watertanks, leidingen en opvangbakken gegroeid. Een deel van dit netwerk is in figuur 1.15 weergegeven.

Figuur 1.15 **Netwerk koelwaterleidingen**



Het koelwater dat op de productielijnen is verbruikt, komt terecht in één van de drie opvangbakken. Vervolgens stroomt het, eventueel via één of meer knooppunten, naar de opslagtanks. Maar dit systeem levert al geruime tijd problemen op. Soms raken opvangbakken zo vol dat ze overstromen, terwijl andere delen van het netwerk droogstaan. Het is een tamelijk eenvoudige ingreep om de sproeiers zo te herschikken dat het water in een andere opvangtank terechtkomt. Maar dan zijn er steeds weer andere leidingen die de aanvoer van water niet aan kunnen. Het netwerk is domweg zo rommelig, dat niet duidelijk is hoeveel koelwater nu maximaal van de opvangbakken naar de opslagtanks kan stromen. In de praktijk bestaan meer situaties waarin de maximale capaciteit van een netwerk moet gevonden. Een dergelijk vraagstuk staat in de vakliteratuur bekend onder de naam *maximale stroomprobleem* (maximal flow problem).

Maximale stroomprobleem

De maximale hoeveelheid water die door het netwerk kan stromen is uiteraard afhankelijk van de capaciteit van de leidingen. Voor het netwerk beschikt Energeen over de gegevens uit tabel 1.38. Nu moet worden berekend wat de maximale hoeveelheid water is die van de opvangbakken naar de opslagtanks kan stromen.

Tabel 1.38 **Capaciteiten leidingen**

Leidingnr.	**Capaciteit** (liter/min.)
1	28
2	33
3	52
4	45
5	39
6	58
7	45
8	40
9	52

Beslissingsvariabelen
De stroming door het netwerk is te specificeren door per leiding aan te geven hoeveel liter water er per minuut doorheen stroomt. De beslissingsvariabelen zijn dus de stroomsterktes (ook wel debieten genaamd) per leiding:

X_1: stroom door leiding 1 in liters per minuut;
…;
X_9: stroom door leiding 9 in liters per minuut.

Doelfunctie
Gevraagd is hoeveel koelwater maximaal uit de opvangbakken en door het netwerk kan worden gevoerd. Om deze vraag te beantwoorden is niet van belang hoeveel water er precies uit iedere opvangbak stroomt; het gaat om de totale stroom die in de leidingen 1 tot en met 5 terechtkomt. De uitstroom is gelijk aan $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Het doel van de optimalisatie is dus:
Maximaliseer: Stroom = $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

Restricties
In het netwerk zijn twee typen restricties, namelijk de capaciteit van de individuele leidingen en de waterbalans per knooppunt. Allereerst de capaciteiten. Gegeven is per leiding hoeveel water er maximaal door kan stromen. Hieruit volgt dus:

$X_1 \leq 28$ liter/minuut [capaciteit leiding 1]
$X_2 \leq 33$ liter/minuut [capaciteit leiding 2]
…
$X_9 \leq 52$ liter/minuut [capaciteit leiding 9].

Vervolgens de knooppunten. We gaan ervan uit dat in een knooppunt geen water weglekt of ophoopt. Per knooppunt moet dan gelden dat de totale hoeveelheid water die binnenstroomt even groot moet zijn als de totale hoeveelheid water die uitstroomt. Dit leidt tot de volgende verbanden:

$X_2 + X_3 = X_6$ [knooppunt A]
$X_4 + X_5 = X_9$ [knooppunt B]
$X_6 = X_7 + X_8$ [knooppunt C]

Oplossing
Na programmering van het lineaire programma in een spreadsheet vindt de ‘Oplosser’ dat de maximale hoeveelheid koelwater die door het netwerk kan stromen gelijk is aan 138 liter/minuut. De gevoeligheidsanalyse van de restricties levert verdere nuttige informatie over het stromingspatroon. Het gevoeligheidsrapport dat de ‘Oplosser’ genereert zou eruit kunnen zien als in tabel 1.39. (Maar andere resultaten zijn ook mogelijk; we bespreken dit hierna.)

Een belangrijke constatering is dat er slechts drie leidingen (1, 6 en 9) zijn waarvan de schaduwprijs ongelijk nul is. De schaduwprijs geeft aan met hoeveel de doelfunctie verandert als de capaciteit van de restrictie toeneemt. Wanneer dus één van de leidingen 1, 6 of 9 een liter per minuut meer kan verwerken, dan zal de totale hoeveelheid koelwater door het netwerk met die ene liter per minuut toenemen. Voor alle andere leidingen (2, 3, 4, 5, 7 en 8) leidt een vergroting van de capaciteit niet tot een grotere nettostroom. Anders gezegd, de leidingen 1, 6 en 9 vormen de ‘bottlenecks’ van dit netwerk.

Tabel 1.39 **Deel gevoeligheidsrapport**

Naam	Eind-waarde	Schaduw-prijs	Rechterzijde restrictie	Toegestane toename	Toegestane afname
Leiding 1	28	1	28	1E+30	1E+30
Leiding 2	6	0	33	1E+30	27
Leiding 3	52	0	52	1E+30	0
Leiding 4	13	0	45	1E+30	32
Leiding 5	39	0	39	1E+30	0
Leiding 6	58	1	58	27	1E+30
Leiding 7	45	0	45	1E+30	0
Leiding 8	13	0	40	1E+30	27
Leiding 9	52	1	52	32	1E+30

Hieruit volgt dat de in tabel 1.39 getoonde vloeistofstromen niet de enige oplossing vormen. Beschouw de bottleneck leiding 6. Hierdoor stroomt de maximale hoeveelheid van 58 liter per minuut. Leiding 6 wordt gevoed door de leidingen 2 en 3, dus deze twee leidingen voeren gezamenlijk 58 liter per minuut aan. Uit tabel 1.39 lezen we af: $X_2 = 6$ liter/minuut en $X_3 = 52$ liter/minuut. Maar een even goede oplossing is $X_2 = 33$ liter/minuut en $X_3 = 25$ liter/minuut. Iedere verdeling over de leidingen 2 en 3 is toegestaan, zolang de capaciteiten van beide leidingen niet wordt overschreden, en zolang de totale stroom uitkomt op 58 liter/minuut. Deze gelijkwaardige oplossingen kunnen worden geformuleerd als:

$$X_2 = 6 + X_{23} \text{ en } X_3 = 52 - X_{23}$$

met de verdeelfactor X_{23} een willekeurige waarde tussen 0 en 27 liter/minuut.

Het feit dat X_2 en X_3 mogen variëren bij dezelfde optimale capaciteit van het netwerk is ook terug te vinden in het gevoeligheidsrapport van de coëfficiënten van de doelfunctie, zie tabel 1.40.

Tabel 1.40 **Gevoeligheidsanalyse coëfficiënten doelfunctie**

Naam	Eind-waarde	Gereduceerde kosten	Coëfficiënt doelfunctie	Toegestane toename	Toegestane afname
X_1	28	0	1	1E+30	1
X_2	33	0	1	1E+30	0
X_3	25	0	1	0	1
X_4	45	0	1	1E+30	0
X_5	7	0	1	0	1
X_6	58	0	0	1E+30	1
X_7	18	0	0	0	1
X_8	40	0	0	1E+30	0
X_9	52	0	0	1E+30	1

We lezen uit tabel 1.40 af dat de toegestane toename voor de coëfficiënt van X_2 en de toegestane afname voor de coëfficiënt van X_3 gelijk zijn aan nul. Hieruit volgt andermaal dat X_2 mag stijgen en X_3 mag dalen bij dezelfde oplossing. Dat een stijging van X_2 is gekoppeld aan een daling van X_3 is overigens niet uit het gevoeligheidsrapport af te lezen.

Een zelfde redenering geldt ook voor de leidingen 4 en 5 en voor de leidingen 7 en 8. Ga na dat de volgende oplossingen allemaal dezelfde doorstroom door het netwerk opleveren:

$$X_4 = 13 + X_{45} \text{ en } X_5 = 39 - X_{45}$$

met verdeelfactor X_{45} een willekeurige waarde tussen 0 en 32 liter/minuut;

$$X_7 = 45 - X_{78} \text{ en } X_8 = 13 + X_{78}$$

met verdeelfactor X_{78} een willekeurige waarde tussen 0 en 27 liter/minuut.

Tot slot in tabel 1.41 nog een oplossing die de 'Oplosser' had kunnen vinden in plaats van die in tabel 1.39.

Tabel 1.41 **Tweede gevoeligheidsrapport**

Naam	Eindwaarde	Schaduwprijs	Rechterzijde restrictie	Toegestane toename	Toegestane afname
Leiding 1	28	1	28	1E+30	1E+30
Leiding 2	33	0	33	1E+30	27
Leiding 3	25	0	52	1E+30	27
Leiding 4	45	0	45	1E+30	32
Leiding 5	7	0	39	1E+30	32
Leiding 6	58	1	58	27	1E+30
Leiding 7	18	0	45	1E+30	27
Leiding 8	40	0	40	1E+30	27
Leiding 9	52	1	52	32	1E+30

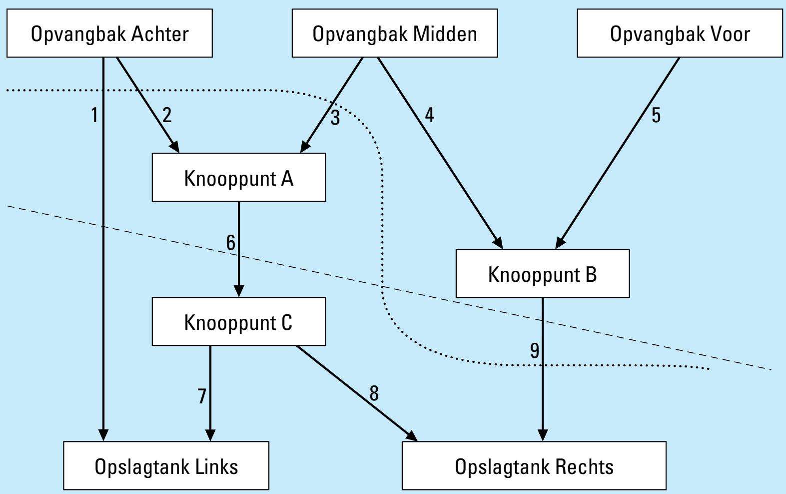
Opmerking 1
Als maat voor de hoeveelheid water die door het netwerk kan stromen hebben we de doelfunctie $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ gebruikt. Ga na dat de doelfunctie $X_1 + X_7 + X_8 + X_9$ tot dezelfde resultaten leidt.

Opmerking 2
Voor het oplossen van dit vraagstuk zijn ook andere methodes dan lineair programmeren beschikbaar. Zeker wanneer vaker aan grotere netwerken moet worden gerekend zijn aparte technieken als de '*maximale-stroom/minimale-snede-stelling*' erg geschikt. Het idee van deze stelling is dat we het netwerk in twee stukken kunnen delen met alle instroompunten aan één kant en alle uitstroompunten aan de andere kant. De maximale stroom tussen de twee helften is dan gelijk aan de maximale capaciteit van alle leidingen tezamen die de twee helften met elkaar verbinden. Het is nu mogelijk op systematische wijze die

Maximale-stroom/minimale-snede-stelling

opsplitsing van het netwerk te vinden die de minste doorstroom tussen de twee helften vereist. Bewezen kan worden dat deze minimale doorstroom tussen de twee helften gelijk is aan de maximale doorstroom van het hele netwerk. In figuur 1.16 zijn ter illustratie twee sneden weergegeven. De capaciteiten van de leidingen door de 'slinger'-snede zijn: 28 + 33 + 52 + 52 = 165; de leidingen door de 'rechte'-snede hebben capaciteiten: 28 + 58 + 52 = 138. De laatste snede bepaalt ook daadwerkelijk de capaciteit van het hele netwerk.

Figuur 1.16 **Voorbeeld 'maximale stroom – minimale snede'**



Analyse
Om te bezien hoe de capaciteit van het netwerk kan worden vergroot, beschouwen we nog enkele scenario's:

Scenario 1
Energeen wil meer koelwater van de opvangbakken naar de opslagtanks voeren. De meest voor de hand liggende ingreep is om de 'bottleneck-leidingen' 1, 6 en 9 aan te pakken. Er wordt besloten de leidingen door een nieuw type pijp – met een grotere capaciteit – te vervangen. De capaciteit van de genoemde leidingen wordt aldus vergroot met respectievelijk 20, 10 en 15 liter/minuut. Wat wordt dan de totale capaciteit van het netwerk?
Indien slechts één leiding wordt vervangen, zouden we de toename in de capaciteit van het netwerk berekenen uit de schaduwprijs van die leiding. Maar in dit geval gaat het om drie leidingen. Is de schaduwprijs van de complete omzetting dan gelijk aan de optelling van de drie afzonderlijke schaduwprijzen? Om deze vraag te beantwoorden kan de 100%-regel voor rechterzijden worden toegepast.
In tabel 1.42 is de toename van de capaciteiten vergeleken met de toegestane toenames. De optelling van de verhoudingen komt uit op 0,84. De 100%-regel voor rechterzijden stelt dat wanneer deze optelling onder de 1 uitkomt, we inderdaad alle schaduwprijzen gewoon samen-

nemen. (Indien de optelling van de verhoudingen boven de 1 uit zou komen, dan zou de totale schaduwprijs misschien – maar niet zeker –veranderen.)

Tabel 1.42 **100%-regel: capaciteit uitbereiding meerdere leidingen**

Leiding	Toename capaciteit	Toegestane toename	Verhouding
1	20	1E+30	12/1E+30 = 0
6	10	27	10/27 = 0,37
9	15	32	15/32 = 0,47
			Totaal = 0,84

In deze situatie is de capaciteitstoename van het netwerk te vinden als de optelling van de capaciteitstoenames van de afzonderlijke leidingen. De toename is dus $20 \times 1 + 10 \times 1 + 15 \times 1 = 45$ liter/minuut.

Scenario 2
Om de doorstroming te verbeteren wordt voorgesteld een 10e (nieuwe) leiding te trekken tussen de knooppunten B en C. Maar ook dan heeft de hoeveelheid water die naar de opslagtanks kan stromen een bovengrens, hoe 'dik' leiding 10 ook wordt gemaakt. Immers, als de capaciteit van leiding 10 geen beperkende factor is, zullen andere leidingen als bottleneck gaan fungeren. Energeen moet beslissen welke capaciteit men deze 10e leiding zal geven. Criterium is dus dat het netwerk zoveel mogelijk water kan verwerken, maar dat de nieuwe leiding niet dikker moet worden gemaakt dan noodzakelijk is.
Om deze vraag te beantwoorden worden in de spreadsheet de volgende aanpassingen gemaakt:

Beslissingsvariabelen
X_{10}: Stroom door leiding 10 in liters per minuut

Restricties
capaciteit leiding 10: $X_{10} < 0$ liter/minuut
knooppunt B: $X_4 + X_5 = X_9 + X_{10}$
knooppunt C: $X_6 + X_{10} = X_7 + X_8$.

Uiteraard is de restrictie aangaande de capaciteit van leiding 10 onzinnig. We hadden ook 5 of 10 liter per minuut als grens kunnen kiezen, maar het punt is dat we bij voorbaat de gewenste capaciteit niet kennen. Het is niet zo aanlokkelijk om via trial-and-error alle mogelijkheden uit te proberen. Het beste is daarom om een willekeurige capaciteit te kiezen, en vervolgens uit het gevoeligheidsrapport te bepalen hoe deze capaciteit beter kan worden gekozen. De 'Oplosser' rapporteert in tabel 1.43 het volgende over de restrictie van Leiding 10 (zie volgende bladzijde).

Hieruit blijkt dat een ophoging van de capaciteit van deze leiding met een bedrag 'x' een toename van de doelfunctie levert van 1x (omdat de

Tabel 1.43 **Gevoeligheidsanalyse extra leiding**

Naam	Eind-waarde	Schaduw-prijs	Rechterzijde restrictie	Toegestane toename	Toegestane afname
.....					
Leiding 10	0	1	0	27	1E+30

schaduwprijs gelijk is aan 1). Dit is het geval zolang 'x' onder de 27 blijft (omdat dit de toegestane toename is).
We concluderen dat Energeen leiding 10 een capaciteit van 27 liter/minuut moet geven.

1.4.3 Toewijzingsprobleem: ontwerp gebouw uit prefab elementen

De ontwerpafdeling van Energeen ontwerpt in opdracht van klanten complete gebouwen. De gebouwen worden samengesteld uit prefab elementen die Energeen zelf produceert. Een fundamentele vraag voor de ontwerpers is steeds welke elementen het beste voor welk gebouw kunnen worden gebruikt.

Probleemomschrijving
Voor iedere klant maakt de ontwerpafdeling een ontwerp dat aansluit op zijn of haar eigen wensen. De wensen van de klant worden uitgedrukt in een aantal specificaties zoals de grootte van het gebouw, het aantal gewenste ramen, de sterkte van de constructie, enzovoort. De ontwerpafdeling selecteert dan een geschikte combinatie van prefab elementen.
Naast de belangen van de klant zijn er natuurlijk de belangen van Energeen zelf: om een gezond bedrijfsresultaat te behalen wil men het ontwerp zo goedkoop mogelijk maken. De uiteindelijke uitdaging is dus een ontwerp te vinden dat voldoet aan alle wensen van de klant, en tegelijkertijd zo goedkoop mogelijk is.

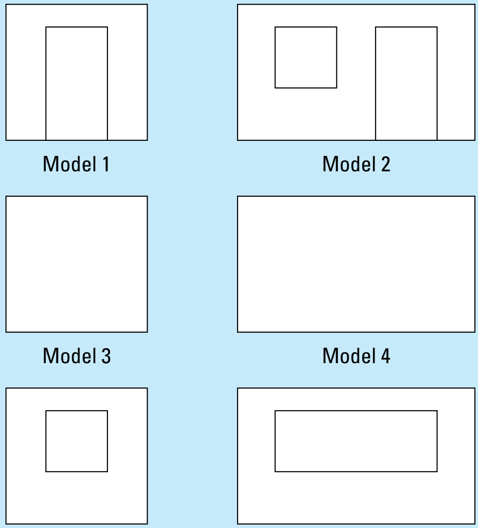
Toewijzingsproblemen

In de praktijk bestaan veel meer situaties waarin een optimale toewijzing van mensen of middelen aan een project of product moet worden gevonden. Vraagstukken uit deze categorie worden in de vakliteratuur vaak toewijzingsproblemen (*assignment problems*) genoemd.

Een klant heeft een gebouwtje van 6 bij 12 meter nodig. Voor de vloer en het dak is er een standaardoplossing waarmee de klant akkoord gaat. Maar voor de buitenwanden zijn er verschillende opties. In figuur 1.17 zijn de bruikbare prefab elementen getoond.

De specificaties van deze zes modellen wat betreft aantallen ramen en deuren, sterkte van de constructie en isolatievermogen zijn in tabel 1.44 samengevat. Ook de eisen van de klant zijn opgenomen.

Figuur 1.17 **Beschikbare prefab elementen**



Tabel 1.44 **Specificaties en eisen**

Model	**Breedte** (m)	**Deur** (aantal)	**Raam** (m^2)	**Sterkte** (kN)	**Isolatie** (Ft)	**Prijs** (euro)
1	2	1	0	45	43	1200
2	4	1	1,7	64	80	2300
3	2	0	0	50	35	600
4	4	0	0	100	70	1000
5	2	0	1,7	30	50	1000
6	4	0	3	50	100	2000
Eisen	36	2	5	700	600	

Beslissingsvariabelen

Men moet besluiten hoeveel van welke prefab elementen gaan worden gebruikt:

X_1: aantal elementen van model 1

…

X_6: aantal elementen van model 6.

Doelfunctie

Het doel is de kosten te minimaliseren:

Minimaliseer: Kosten = $1200X_1 + \ldots + 2000X_6$.

Restricties
In het ontwerp kunnen uiteraard alleen maar hele prefab elementen worden gebruikt. Alle beslissingsvariabelen moeten dus gehele getallen zijn:

$$X_1, \ldots, X_6 \text{ geheeltallig} \qquad \text{[geheeltalligheid]}$$

Verder moet het gebouw voldoen aan de hiervóór gestelde eisen:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl}
2X_1 & + & 4X_2 & + & 2X_3 & + & 4X_4 & + & 2X_5 & + & 4X_6 & = 36 & \text{[omtrek]} \\
X_1 & + & X_2 & & & & & & & & & = 2 & \text{[deuren]} \\
 & & 1{,}7X_2 & + & & & & & 1{,}7X_5 & + & 3X_6 & > 5 & \text{[ramen]} \\
45X_1 & + & 64X_2 & + & 50X_3 & + & 100X_4 & + & 30X_5 & + & 50X_6 & > 700 & \text{[sterkte]} \\
43X_1 & + & 80X_2 & + & 35X_3 & + & 70X_4 & + & 50X_5 & + & 100X_6 & > 600 & \text{[isolatie].}
\end{array}$$

Oplossing
Met de spreadsheet uit tabel 1.45 kan het lineaire programma worden doorgerekend. De eis van geheeltalligheid moet ook als restrictie in de ‘Oplosser’ worden opgenomen. De goedkoopste keuze van geschikte prefab elementen is uit de spreadsheet-cellen B14 tot en met B19 af te lezen. De prijs van dit ontwerp komt uit op €12.000.

Analyse
Zowel voor de klant als voor Energeen kan het van belang zijn om te weten hoe kleine veranderingen in de specificaties de eindoplossing beïnvloeden. Maar omdat we hier met geheeltallige beslissingsvariabelen werken, is het wiskundig erg lastig een gevoeligheidsanalyse uit te voeren. Software-pakketten voor lineair programmeren zoals de ‘Oplosser’ kunnen hier geen gevoeligheidsrapport leveren. Het enige wat we kunnen doen is handmatig de gegevens uit de spreadsheet wijzigen en dan opnieuw de ‘Oplosser’ een oplossing laten zoeken.

Scenario 1
De klant wil graag weten hoeveel meer raamoppervlak in het gebouwtje te realiseren is, waarbij aan alle overige eisen wel moet blijven worden voldaan. We kunnen het antwoord vinden door in cel D11 in de spreadsheet van tabel 1.45 verschillende hogere waarden in te vullen, en iedere keer opnieuw de ‘Oplosser’ toe te passen. Een paar minuten uitproberen levert onder meer de volgende opties voor de klant:

$X_1 = 2$, $X_3 = 1$, $X_4 = 5$, $X_5 = 5$, raamoppervlak = 8,5 m^2, prijs = €13.000;
$X_1 = 2$, $X_4 = 5$, $X_5 = 6$, raamoppervlak = 10,2 m^2, prijs = €13.400;
$X_1 = 2$, $X_3 = 1$, $X_4 = 4$, $X_5 = 7$, raamoppervlak = 11,9 m^2, prijs = €14.000;
$X_1 = 2$, $X_3 = 1$, $X_4 = 3$, $X_5 = 9$, raamoppervlak = 15,3 m^2, prijs = €15.000.

Scenario 2
Tijdens de ontwerpfase komt net een nieuw zevende model prefab element beschikbaar. Het is een breed element met een klein raampje. Figuur 1.18 toont het model en zijn specificaties.

De vraag is natuurlijk of met inzet van dit prefab element het gebouw goedkoper kan worden gemaakt. Hiertoe passen we het lineaire programma als volgt aan:

Tabel 1.45 **Spreadsheet ontwerp**

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Specificaties**						
2		Breedte	Deur	Raam	Sterkte	Isolatie	Prijs
3	Model	(m)	(aantal)	(m^2)	(kN)	(Ft)	(euro)
4	1	2	1	0	45	43	1200
5	2	4	1	1,7	64	80	2300
6	3	2	0	0	50	35	600
7	4	4	0	0	100	70	1000
8	5	2	0	1,7	30	50	1000
9	6	4	0	3	50	100	2000
10							
11	**Eisen**	36	2	5	700	600	
12							
13	**Beslissingsvariabelen**						
14	Model 1	2					
15	Model 2	0					
16	Model 3	1					
17	Model 4	6					
18	Model 5	3					
19	Model 6	0					
20							
21	**Doelfunctie**						
22	Prijs	=SOMPRODUCT (B14:B19;G4:G9)					
23							
24	**Restricties**						
25	Omtrek	=SOMPRODUCT (B14:B19;B4:B9)	=	=B11			
26	Deuren	=SOMPRODUCT (B14:B19;C4:C9)	=	=C11			
27	Ramen	=SOMPRODUCT (B14:B19;D4:D9)	>=	=D11			
28	Sterkte	=SOMPRODUCT (B14:B19;E4:E9)	>=	=E11			
29	Isolatie	=SOMPRODUCT (B14:B19;F4:F9)	>=	=F11			

Beslissingsvariabelen
Introduceer de nieuwe variabele:

X_7: aantal elementen van model 7

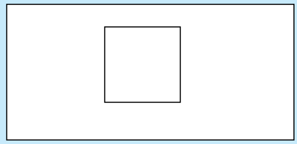
Doelfunctie
Voeg de kosten van het zevende element toe aan de doelfunctie:
Minimaliseer: Kosten = $1200X_1 + \ldots + 2000X_6 + 1300X_7$

Restricties
Ook de nieuwe variabele is natuurlijk geheeltallig:

$X_1, \ldots, X_6, X_7$: geheeltallig [geheeltalligheid]

Verder moeten in alle restricties nu ook de kenmerken van het zevende element worden toegevoegd:

Figuur 1.18 **Prefab model 7**



Model 7

Model	**Breedte** (m)	**Deur** (aantal)	**Raam** (m^2)	**Sterkte** (kN)	**Isolatie** (Ft)	**Prijs** (Euro)
7	4	0	1,7	74	80	1.300

$2X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 4X_4 + 2X_5 + 4X_6 + 4X_7 = 36$ [omtrek]
$X_1 + X_2 = 2$ [deuren]
$1{,}7X_2 + 1{,}7X_5 + 3X_6 + 1{,}7X_7 > 5$ [ramen]
enzovoort.

Wanneer we dit probleem door de 'Oplosser' laten doorrekenen vinden we:
$X_1 = 2$, $X_4 = 5$, $X_7 = 3$. De prijs wordt €11.300 en is inderdaad lager dan de oorspronkelijke.

Scenario 3
Een gebouw moet functioneel zijn binnen de omgeving waarin het staat. Zo is normaal gesproken natuurlijk duidelijk gespecificeerd welke kant 6 meter en welke kant 12 meter lang moet zijn, en waar de ramen en de deuren moeten zitten.
Het is dus te begrijpen dat de klant zijn specificaties als volgt aanscherpt:
- maten: 6 meter aan de noord- en zuidkant, 12 meter aan de west- en oostkant;
- deuren: 1 aan de noordkant, 1 aan de west-, oost- of zuidkant;
- ramen: minimaal 1 m^2 aan de zuidkant, minimaal 1 m^2 aan de westkant;
- sterkte: 700 kN voor alle wanden tezamen;
- isolatie: 600 Ft voor alle wanden tezamen.

Deze scherpere specificaties vragen om een uitbereiding van het lineaire programma.

Beslissingsvariabelen
Voor iedere zijde van het gebouwtje moet nu apart worden bepaald welke prefab elementen daar komen te staan. Omdat er langs vier zijden zes verschillende elementen kunnen staan, zijn er nu 24 beslissingsvariabelen:
$X_{1,N}$: aantal elementen van model 1 in de noordelijke wand;
$X_{2,N}$: aantal elementen van model 2 in de noordelijke wand;
...;

$X_{1,O}$: aantal elementen van model 1 in de oostelijke wand;
…;
$X_{4,W}$: aantal elementen van model 4 in de westelijke wand;
…;
$X_{5,Z}$: aantal elementen van model 5 in de zuidelijke wand;
$X_{6,Z}$: aantal elementen van model 6 in de zuidelijke wand.

Doelfunctie
De doelfunctie berekent nog steeds de kosten, alleen moeten hierin nu wel alle 24 variabelen in worden meegenomen:
Minimaliseer: Kosten = $1200X_{1,N} + 2300X_{2,N} + \ldots + 2000X_{6,Z}$

Restricties
De nieuwe restricties moeten worden vertaald in formules:

$X_{1,N} + X_{2,N} + X_{3,N} + X_{4,N} + X_{5,N} + X_{6,N} = 6$ [maat noord];
$X_{1,W} + X_{2,W} + X_{3,W} + X_{4,W} + X_{5,W} + X_{6,W} = 12$ [maat west];
…;
$X_{1,N} + X_{2,N} = 1$ [deur noord]
$X_{1,W} + X_{2,W} + X_{1,O} + X_{2,O} + X_{1,Z} + X_{2,Z} = 1$ [deur w-o-z]
…;
enzovoort.

Het nu ontstane lineaire programma vraagt van de 'Oplosser' heel wat meer rekenwerk dan het voorgaande. (Vraagstukken met geheeltallige variabelen zijn berucht om de lange rekentijd.) Er blijken twee optimale oplossingen te zijn, zoals getoond in tabel 1.46.

Tabel 1.46 **Oplossingen**

	Noord	**West**	**Zuid**	**Oost**	
model 1	1	0	1	0	Raam Z: 3,0 m^2
model 2	0	0	0	0	Raam W: 3,4 m^2
model 3	0	0	0	0	Sterkte: 800 kN
model 4	1	2	0	3	Isolatie: 706 Ft
model 5	0	2	0	0	
model 6	0	0	1	0	Prijs: €12.400

	Noord	**West**	**Zuid**	**Oost**	
model 1	1	0	1	0	Raam Z: 3,0 m^2
model 2	0	0	0	0	Raam W: 3,0 m^2
model 3	0	0	0	0	Sterkte: 790 kN
model 4	1	2	0	3	Isolatie: 706 Ft
model 5	0	0	0	0	
model 6	0	1	1	0	Prijs: €12.400

Qua prijs en qua specificaties blijkt het mogelijk aan de westzijde twee elementen van model 5 in te ruilen voor één element van model 6. De 'Oplosser' meldt niet uit zichzelf dat er twee mogelijkheden zijn. Omdat vanwege de geheeltalligheid ook geen gevoeligheidsrapport te genereren is, is het puur een kwestie van variëren en uitproberen om de verschillende oplossingen te vinden.

1.5 Optimalisatie bij de Hollandse Elektronica Fabriek

Jacomien Bolmikolke heeft in haar stagejaar ook stage gelopen bij de Hollandse Elektronica Fabriek, meestal kortweg de HEF genoemd. Dit bedrijf maakt elektronische componenten, die worden gebruikt in auto's, vliegtuigen, boten en telefoons. Zo maakt de HEF microfoons die worden gebruikt in prepaid- en gsm-telefoons, en twee componenten voor de Airbus, die de codenamen A en B hebben gekregen.
De HEF heeft een groot eigen vrachtwagenpark om de eindproducten bij de afnemers van de elektronische componenten te bezorgen.

Jacomien heeft zich tijdens haar stage bij de HEF beziggehouden met een drietal optimalisatieproblemen. In deze paragraaf bespreken we de modellen die ze heeft gemaakt om die problemen op te lossen. Aan de orde komen:

- vernieuwing van het wagenpark van de HEF, zie paragraaf 1.5.1;
- toewijzing van arbeidsuren in de afdelingen waar de microfoons worden gemaakt, zie paragraaf 1.5.2;
- planning van de productie van de elektronische componenten A en B, zie paragraaf 1.5.3.

1.5.1 Vernieuwing van het wagenpark

Probleemomschrijving (scenario 1)
De HEF is toe aan vernieuwing van het vrachtwagenpark. Jacomien heeft eerst een aantal relevante gegevens verzameld.
Het bedrijf heeft een investeringsbudget van 3,6 miljoen euro beschikbaar en heeft belangstelling voor drie typen vrachtauto's:

1 een Nederlandse vrachtauto met een laadvermogen van 10 ton en een gemiddelde snelheid van 70 km per uur. Prijs: 80.000 euro;
2 een Duitse vrachtauto met een laadvermogen van 20 ton en een gemiddelde snelheid van 60 km per uur. Prijs: 135.000 euro;
3 een Zweedse vrachtauto met een laadvermogen van 18 ton en een gemiddelde snelheid van 60 km per uur. Deze vrachtauto heeft als extra een slaapcabine. Prijs: 140.000 euro.

De Nederlandse auto wordt door één chauffeur gereden en kan bij een drieploegendienst gemiddeld 18 uur per dag in bedrijf zijn. De Duitse auto wordt door twee chauffeurs gereden en kan bij een drieploegendienst gemiddeld 18 uur per dag in bedrijf zijn. De Zweedse auto ten slotte wordt ook door twee chauffeurs gereden, maar kan bij een drieploegendienst gemiddeld 21 uur per dag in gebruik zijn. Het bedrijf heeft 140 chauffeurs beschikbaar om de auto's te rijden. In verband met het onderhoud van de wagens mag het totale autopark niet groter zijn dan 30 wagens.
De HEF heeft als eis gesteld dat de totale capaciteit van de auto's zo groot mogelijk moet zijn. Deze capaciteit wordt uitgedrukt in tonkilometers per euro. Bij de beschrijving van de doelfunctie wordt nader ingegaan op deze capaciteitseenheid.

Beslissingsvariabelen
Jacomien heeft de volgende beslissingsvariabelen gedefinieerd:
x_1 = aantal Nederlandse vrachtauto's

x_2 = aantal Duitse auto's
x_3 = aantal Zweedse auto's.

Doelfunctie

De capaciteit van de vrachtwagens wordt uitgedrukt in tonkilometers per euro. Deze capaciteit verkrijgen we door het laadvermogen te vermenigvuldigen met de snelheid en het aantal uren en vervolgens te delen door de prijs van de auto. Voor de Nederlandse auto is de capaciteit dus gelijk aan: 10 (ton) × 70 (km/uur) × 18 (uur)/80000 (prijs) = 0,1575.
Voor de Duitse en de Zweeds auto vinden we op dezelfde manier een capaciteit van respectievelijk 0,1600 en 0,1620. De doelfunctie wordt dan, met Cap = capaciteit:

Maximaliseer: $\text{Cap} = 0{,}1575x_1 + 0{,}1600x_2 + 0{,}620x_3$

Restricties

Er zijn drie restricties te formuleren: een budgetrestrictie, een personeelsrestrictie en een onderhoudsrestrictie. Verder moeten alle beslissingsvariabelen natuurlijk niet-negatief zijn en ze moeten geheeltallig zijn. Uitgedrukt in de beslissingsvariabelen krijgen we dan:

$$\begin{array}{rrrrl} 80.000x_1 + & 135.000x_2 + & 140.000x_3 \leq & 3.600.000 & \text{[budget]} \\ 3x_1 + & 6x_2 + & 6x_3 \leq & 140 & \text{[personeel]} \\ x_1 + & x_2 + & x_3 \leq & 30 & \text{[onderhoud]} \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 & \text{[positiviteit]} \\ & & x_1, x_2, x_3 & \text{geheeltallig} & \text{[geheeltalligheid]} \end{array}$$

Oplossing

De oplossing wordt bepaald met behulp van Excel. In tabel 1.47 is het spreadsheet-model gegeven.

In de spreadsheet van tabel 1.47 is ook de oplossing al gegeven, zie kolom B. Deze oplossing is verkregen door de 'Oplosser' in te vullen zoals is weergegeven in figuur 1.19.

Tabel 1.47 **Spreadsheet-model wagenpark**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**HEF (Wagenpark)**							
2								
3	**Besl. var**			**Laadverm.** (ton)	**Snelheid** (km/hr)	**Uren**	**Prijs** (euro)	**Cap** (tonkm/euro)
4	x1=	14		10	70	18	80000	0,1575
5	x2=	0		20	60	18	135000	0,16
6	x3=	16		18	60	21	140000	0,162
7								
8	**Doelf.=**	4,797						
9								
10	**Restr.**							
11	Budget	3520000	<=	3600000				
12	Personeel	138	<=	140				
13	Onderhoud	30	<=	30				
14								

Figuur 1.19 **'Oplosser' voor het wagenpark van de HEF**

De eis dat alle variabelen positief moeten zijn, kan worden aangegeven met behulp van de knop Opties in het scherm van de 'Oplosser'.

In begrijpelijke termen luidt de oplossing: De maximale capaciteit is 4,797 tonkilometers/euro. Er moeten dan veertien nederlandse vrachtauto's worden aangeschaft en zestien Zweedse. Blijkbaar is het optimaal om geen Duitse auto's aan te schaffen.
Van het beschikbare budget is 3.520.000 euro gebruikt. Er is dus nog 80.000 euro over.

De HEF houdt nog twee chauffeurs over die niet worden ingezet. Het onderhoud is blijkbaar een bottleneck bij de HEF, want alle onderhoudscapaciteit is opgebruikt in de optimale situatie.

Analyse van de oplossing (scenario 2)
Omdat de Duitse vrachtauto het grootste laadvermogen heeft, eiste het management in eerste instantie dat minstens de helft van de aan te schaffen auto's van Duitse makelij moest zijn. Zo'n eis kan worden vertaald naar de volgende extra restrictie:

$$x_2 \geq (x_1 + x_2 + x_3)/2 \qquad \text{[managementeis]}$$

Dat deze eis beter kon vervallen, heeft Jacomien laten zien door die restrictie als extra restrictie toe te voegen aan het spreadsheet-model en dit nieuwe model opnieuw door te rekenen. De nieuwe oplossing wordt dan: maximale capaciteit is 4.767 tonkilometers/euro. De capaciteit is dus minder geworden. Er worden veertien Nederlandse auto's, vijftien Duitse auto's en één Zweedse auto aangeschaft. Van het budget blijft nog 380 000 euro over. Ook nu worden twee chauffeurs niet ingezet.

Analyse van de oplossing (scenario 3)
Een importeur van Franse vrachtauto's wil graag een graantje meepikken bij de HEF. Hij heeft een auto die dezelfde specificaties heeft als de Nederlandse, maar minder onderhoudsgevoelig is. De Franse auto kan namelijk 20 uur per dag in bedrijf zijn. De prijs is echter hoger, namelijk 90.000 euro per auto.
Om te beoordelen of de aanschaf van één of meer Franse vrachtwagens interessant is, moet het spreadsheet-model weer worden aangepast Jacomien introduceerde een extra beslissingsvariabele: x_4 = aantal aan te schaffen Franse auto's.
De capaciteit van de Franse auto is: $10 \times 70 \times 20 / 90000 = 0{,}1556$.
Het nieuwe model wordt dan:

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{Maximaliseer } & \multicolumn{4}{l}{\text{Cap} = 0{,}1575x_1 + 0{,}1600x_2 + 0{,}620x_3 + 0{,}1556x_4} & \\
\text{m.b.t. } & 80.000x_1 + & 13.500x_2 + & 140.000x_3 + & 90.000x_4 \leq 3.600.000 & \text{[budget]} \\
 & 3x_1 + & 6x_2 + & 6x_3 + & 3x_4 \leq 140 & \text{[personeel]} \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 \leq 30 & \text{[onderhoud]} \\
 & & & \multicolumn{2}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} & \text{[positiviteit]} \\
 & & & \multicolumn{2}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ geheeltallig}} & \text{[geheeltalligheid].}
\end{array}
$$

Opnieuw doorrekenen van dit model geeft dezelfde oplossing als in scenario 1, dus veertien Nederlandse en zestien Zweedse auto's aanschaffen. De aanschaf van één of meer Franse auto's is dus geen optie.

1.5.2 Toewijzing van arbeidsuren

De HEF maakt maandelijks een planning voor de productie van de microfoontjes die in de mobiele telefoons gaan worden gemonteerd. Jacomien heeft opdracht gekregen een spreadsheet-model van deze planning te maken. Het model dient de winst te maximaliseren. Ze gaat als volgt te werk.

Probleemomschrijving (scenario 1)
De microfoontjes voor de pre-paid mobiele telefoon noemen we voor het gemak product 1, die voor de gsm noemen we product 2. De productie vindt plaats in vier verschillende afdelingen. Er is genoeg machinecapaciteit, maar de arbeidsuren kunnen een bottleneck vormen.
De benodigde arbeidsuren per doos van 12 microfoons en de totaal beschikbare arbeidsuren staan in tabel 1.48.

Het bedrijf maakt een winst van €3 per doos van product 1 en €2,70 per doos van product 2.

Tabel 1.48 **Benodigde en beschikbare arbeidsuren**

Afdeling	Product 1	Product 2	Beschikbaar
1	0,070	0,100	700
2	0,050	0,084	600
3	0,100	0,067	800
4	0,010	0,025	200

Beslissingsvariabelen

x_1 = aantal te produceren dozen van product 1
x_2 = aantal te produceren dozen van product 2.

Er worden maandelijks zoveel microfoontjes geproduceerd, dat de beslissingsvariabelen als continue variabelen mogen worden beschouwd.

Doelfunctie

De doelfunctie die de winst maximaliseert ziet er, uitgedrukt in de beslissingsvariabelen, als volgt uit: Maximaliseer $3x_1 + 2{,}7x_2$.

Restricties

Er zijn vier restricties, voor elke afdeling een. Bovendien moeten de variabelen weer niet-negatief zijn. De restricties zijn dan:

$0{,}070x_1 + 0{,}100x_2 \leq 700$ [arbeidsuren afdeling 1]
$0{,}050x_1 + 0{,}084x_2 \leq 600$ [arbeidsuren afdeling 2]
$0{,}100x_1 + 0{,}067x_2 \leq 800$ [arbeidsuren afdeling 3]
$0{,}010x_1 + 0{,}025x_2 \leq 200$ [arbeidsuren afdeling 4]
$x_1, x_2 \geq 0$ [positiviteit].

Oplossing

Oplosser

Hoewel dit probleem grafisch is op te lossen, verdient toch de Excel-oplossing de voorkeur, omdat we dan eenvoudiger een gevoeligheidsanalyse kunnen uitvoeren.
Het model, samen met de oplossing, is gegeven in tabel 1.49.

Tabel 1.49

HEF

Besl. var.			**afd**	Benodigd en beschikbaar (uren) **product 1**	**product 2**	**beschikbaar**
x1=	6233,52		1	0,070	0,100	700
x2=	2636,53		2	0,050	0,084	600
			3	0,100	0,067	800
			4	0,010	0,025	200
Doelfunctie:	25819,21					
Restricties						
arb. afd 1	700,00	<=	700			
arb. afd 2	533,15	<=	600			
arb. afd 3	800,00	<=	800			
arb. afd 4	128,25	<=	200			

De maximale winst bedraagt bijna 25.820 euro en wordt bereikt door maandelijks 6234 dozen van product 1 te maken en 2637 dozen van product 2 (de getallen zijn afgerond).
Het blijkt bij deze planning dat de afdelingen 1 en 3 voor 100% bezet zijn en dus een bottleneck vormen. Ook afdeling 2 heeft een zeer hoge bezettingsgraad. Afdeling 4 is behoorlijk onderbezet.

Gevoeligheidsanalyse

Het rapport betreffende de gevoeligheidsanalyse is weergegeven in tabel 1.50.

Tabel 1.50 **Gevoeligheidsanalyse**

Naam	Eind-waarde	Gereduceerde kosten	Coëfficiënt doelfunctie	Toegestane toename	Toegestane afname
x1=	6233,52	0,00	3	1,029850746	1,11
x2=	2636,53	0,00	2,7	1,585714286	0,69

Naam	Eind-waarde	Schaduw-prijs	Rechterzijde restrictie	Toegestane toename	Toegestane afname
arb. afd 2	533,15	0,00	600	1E+30	66,85499058
arb. afd 3	800,00	20,90	800	200	331
arb. afd 1	700,00	12,99	700	70,2970297	140
arb. afd 4	128,25	0,00	200	1E+30	106,7514124

Uit het gevoeligheidsrapport blijkt dat de oplossing (gelukkig?) niet erg gevoelig is voor veranderingen in de winst per doos. Dit geldt voor zowel product 1 als product 2. Zie de toegestane toename en afname bij de coëfficiënten van de doelfunctie.
De schaduwprijs van afdeling 1 is (afgerond) 13 euro. Dat wil zeggen: één arbeidsuur extra doet de winst met 13 euro stijgen. In afdeling 3 is die winststijging per arbeidsuur 21 euro.

Analyse van de oplossing (scenario 2)
Het management van de HEF heeft meer verantwoordelijkheden gedelegeerd naar de afdelingen. Met name de verantwoordelijkheid voor de toewijzing van arbeidsuren aan de diverse productieafdelingen is bij de chef van de productie komen te liggen. Die productiechef moet nu maandelijks 900 arbeidsuren zo goed mogelijk verdelen over de vier afdelingen. De totaal beschikbare hoeveelheid uren is echter niet toegenomen, zie tabel 1.51.

Tabel 1.51 **Toewijzing arbeidsuren**

Mogelijke toewijzing	Uren beschikbaar
Afdeling 1	400
Afdeling 2	350
Afdeling 3	500
Afdeling 4	100
Afdeling 1 of 2	500
Afdeling 3 of 4	400

Zo kan de productiechef (bijvoorbeeld) in afdeling 1 meer uren toewijzen dan de 700 die hij had in scenario 1. Hij zou die afdeling zelfs kunnen uitbreiden tot 900 uur, maar dat gaat dan wel ten koste van de andere afdelingen.
De productiechef heeft Jacomien gevraagd haar planningmodel zodanig aan te passen, dat uit het model ook een optimale verdeling van de arbeidsuren rolt. Het doel blijft nog steeds: maximalisatie van de winst.
Die modelaanpassing gaat als volgt. Ze introduceert vier extra beslissingsvariabelen, b_1, b_2, b_3 en b_4. Deze variabelen stellen de beschikbaarheid voor van arbeidsuren in respectievelijk de afdelingen 1 tot en met 4.

De restricties uit scenario 1 worden nu:

$0{,}070x_1 + 0{,}100x_2 \leq b_1$ [arbeidsuren afdeling 1]
$0{,}050x_1 + 0{,}084x_2 \leq b_2$ [arbeidsuren afdeling 2]
$0{,}100x_1 + 0{,}067x_2 \leq b_3$ [arbeidsuren afdeling 3]
$0{,}010x_1 + 0{,}025x_2 \leq b_4$ [arbeidsuren afdeling 4]

Voor die variabelen b_1 tot en met b_4 gelden nog de volgende beperkingen:

$b_1 \leq 400 + 500 = 900$ [beschikbaar afdeling 1]
$b_2 \leq 350 + 500 = 850$ [beschikbaar afdeling 2]
$b_3 \leq 500 + 400 = 900$ [beschikbaar afdeling 3]
$b_4 \leq 100 + 400 = 500$ [beschikbaar afdeling 4]

Echter, omdat de 500 uren in afdeling 1 of 2 niet aan allebei de afdelingen tegelijkertijd kunnen worden toegewezen, moet ook nog gelden:

$b_1 + b_2 \leq 400 + 350 + 500 = 1250$ [beschikbaar afd.1 en 2]

Evenzo voor de afdelingen 3 en 4:

$b_3 + b_4 \leq 500 + 100 + 400 = 1000$ [beschikbaar afd.3 en 4]

Het nieuwe planningmodel wordt nu:
Maximaliseer: $3x_1 + 2{,}7x_2$
met betrekking tot:

$0{,}070x_1 + 0{,}100x_2$	$\leq b_1$	[arbeidsuren afdeling 1]
$0{,}050x_1 + 0{,}084x_2$	$\leq b_2$	[arbeidsuren afdeling 2]
$0{,}100x_1 + 0{,}067x_2$	$\leq b_3$	[arbeidsuren afdeling 3]
$0{,}010x_1 + 0{,}025x_2$	$\leq b_4$	[arbeidsuren afdeling 4]
b_1	≤ 900	[beschikbaar afdeling 1]
b_2	≤ 850	[beschikbaar afdeling 2]
b_3	≤ 900	[beschikbaar afdeling 3]
b_4	≤ 500	[beschikbaar afdeling 4]
$b_1 + b_2$	≤ 1250	[beschikbaar afdeling 1 en 2]
$b_3 + b_4$	≤ 1000	[beschikbaar afdeling 3 en 4]
$x_1, x_2, b_1, b_2, b_3, b_4 \geq 0$		

Het spreadsheet-model dient nu natuurlijk ook overeenkomstig het nieuwe planningmodel te worden aangepast. De nieuwe optimale oplossing is: $x_1 = 7500$ (productie van product 1), $x_2 = 1902$ (productie van product 2) met winst = €27636.
De bezetting van de afdelingen is: $b_1 = 715$ uur, $b_2 = 535$ uur, $b_3 = 877$ uur en $b_4 = 123$ uur.
In totaal worden weer alle beschikbare arbeidsuren ingezet, maar door een flexibeler inzet is de winst ten opzichte van scenario 1 met 7% toegenomen.

1.5.3 **Productieplanning van de vliegtuigcomponenten**

Jacomien heeft de opdracht gekregen om ten behoeve van de vliegtuigcomponenten A en B een zogenoemde 3-maands-planning te maken voor elke kwartaalorder die de HEF binnenkrijgt. Dat wil zeggen: ze moet bepalen welke hoeveelheden van de twee componenten A en B er maandelijks moeten worden geproduceerd. De maandelijkse uitlevering aan de vliegtuigfabriek mag niet in gevaar komen en de totale kosten moeten zo laag mogelijk zijn.

Probleemomschrijving
Elk kwartaal geeft de vliegtuigfabriek aan de HEF door, welke maandelijkse hoeveelheden er van iedere component moeten worden gemaakt voor het komende kwartaal. Deze maandelijkse hoeveelheden kunnen erg variëren, afhankelijk van het type vliegtuig dat in productie is. De HEF heeft daarom (al enige tijd geleden) besloten om, waar dit nuttig en nodig is, op voorraad te produceren. De maandelijkse uitlevering van de componenten hoeft dus niet gelijk te zijn aan de maandelijkse productie.

De HEF heeft voor kwartaal 2 (de maanden april, mei en juni) de volgende order binnengekregen:

- component A, levering van: 2000 stuks in april, 3500 in mei en 2500 in juni;
- component B, levering van: 1500 stuks in april, 2400 in mei en 2000 in juni.

Als eerste heeft Jacomien gegevens verzameld. Die gegevens betreffen:
a productiekosten
b voorraden en voorraadkosten.

Ad a Productiekosten
De productiekosten bedragen voor component A: €20 per eenheid en voor component B: €10 per eenheid.
Deze kosten zijn onafhankelijk van de maand waarin de componenten worden gemaakt.

Ad b Voorraden en voorraadkosten
Alleen de eindvoorraden van beide componenten worden door de HEF gewaardeerd. De voorraadkosten bedragen per eenheid per maand 15% van de productiekosten.
Van component A zijn nog 500 stuks aanwezig en van component B 200 stuks. De HEF wil aan het eind van het kwartaal van beide componenten nog een voorraad van minstens 200 stuks B hebben.

Verder is nog bekend dat er in maart 1500 eenheden A en 1000 eenheden B zijn geproduceerd. Ook heeft Jacomien gegevens verzameld over de machinecapaciteit, de arbeidscapaciteit, de beschikbare magazijnruimte en het beslag dat de componenten A en B op deze capaciteitssoorten leggen. Deze gegevens staan in de tabellen 1.52 en 1.53.

Tabel 1.52 **Capaciteitsgegevens**

	Machinecapaciteit (in uren)	**Arbeidscapaciteit** (in uren)	**Magazijnruimte** (in m^2)
April	400	300	1500
Mei	500	320	1500
Juni	450	280	1500

Tabel 1.53 **Capaciteitsbeslag per eenheid**

	Machine-uren	**Arbeidsuren**	**Magazijnruimte** (m^2)
Component A	0,10	0,05	2
Component B	0,08	0,07	3

Jacomien heeft inmiddels wat ervaring opgedaan in het werken met lineaire modellen en veronderstelt daarom dat dit planningprobleem met behulp van lineaire programmering kan worden opgelost.

Beslissingsvariabelen
Er moet voor twee componenten en voor drie maanden een productiehoeveelheid worden bepaald. Jacomien definieert daarom met betrekking tot de productie 6 beslissingsvariabelen:

XA_j = productie van component A in maand j (j = 1, 2, 3)
XB_j = productie van component B in maand j (j = 1, 2, 3).

Aangezien de HEF op voorraad produceert, heeft Jacomien ook nog eens zes beslissingsvariabelen nodig voor de voorraden van de componenten in de drie maanden:
SA_j = voorraad van component A aan het eind van maand j (j = 1, 2, 3)
SB_j = voorraad van component B aan het eind van maand j (j = 1, 2, 3)

Jacomien heeft dus een planningmodel met in totaal twaalf beslissingsvariabelen.

Doelfunctie
De doelfunctie wordt, met TK als afkorting voor de totale kosten:

$$TK = 20XA_1 + 20XA_2 + 20XA_3 + 10XB_1 + 10XB_2 + 10XB_3 + 3SA_1 + 3SA_2 + 3SA_3 + 1{,}5SB_1 + 1{,}5SB_2 + 1{,}5SB_3$$

Restricties
Er zijn twee soorten restricties:
- Er moet aan de vraag worden voldaan (met behulp van zogenoemde voorraadbalansen). Van deze soort zijn er, zo blijkt, acht beperkingen.
- Er zijn beperkingen ten aanzien van de beschikbare capaciteit. Deze capaciteitsbeperkingen zijn weer onder te verdelen in beperkingen met betrekking tot machines, tot arbeid en tot ruimte, in totaal negen beperkingen.

Voorraadbalansen
Algemeen geldt voor een willekeurige maand:
beginvoorraad + productie – eindvoorraad = vraag in die maand
We vinden dan:
voor maand 1 en component A:
$500 + XA_1 - SA_1 = 2000$ [vrd. bal. apr. A];
voor maand 1 en component B:
$200 + XB_1 - SB_1 = 1500$ [vrd. bal. apr. B];
voor maand 2 en component A:
$SA_1 + XA_2 - SA_2 = 3500$ [vrd. bal. mei A];

voor maand 2 en component B:

$SB_1 + XB_2 - SB_2 = 2400$ [vrd. bal. mei B];

voor maand 3 en component A:

$SA_2 + XA_3 - SA_3 = 2500$ [vrd. bal. jun. A];

voor maand 3 en component B:

$SB_2 + XB_3 - SB_3 = 2000$ [vrd. bal. jun. B];

gewenste eindvoorraad component A:

$SA_3 \geq 200$ [eindvrd. A];

gewenste eindvoorraad component B:

$SB_3 \geq 200$ [eindvrd. B].

Capaciteitsbeperkingen met betrekking tot de machines

$0{,}10\ XA_1 + 0{,}08\ XB_1 \leq 400$ [mach.cap. apr.]

$0{,}10\ XA_2 + 0{,}08\ XB_2 \leq 500$ [mach.cap. mei]

$0{,}10\ XA_3 + 0{,}08\ XB_3 \leq 450$ [mach.cap. jun.].

Capaciteitsbeperkingen met betrekking tot de arbeid

$0{,}05\ XA_1 + 0{,}07\ XB_1 \leq 300$ [arb.cap. apr.]

$0{,}05\ XA_2 + 0{,}07\ XB_2 \leq 320$ [arb.cap. mei]

$0{,}05\ XA_3 + 0{,}07\ XB_3 \leq 280$ [arb.cap. jun.].

Capaciteitsbeperkingen met betrekking tot de ruimte

$2SA_1 + 3SB_1 \leq 1500$ [mag.cap. apr.]

$2SA_2 + 3SB_2 \leq 1500$ [mag.cap. mei]

$2SA_3 + 3SB_3 \leq 1500$ [mag.cap. jun.].

Het LP-model heeft dus in totaal twaalf variabelen en zeventien beperkingen.

Oplossing

Jacomien heeft een spreadsheet-model gemaakt van haar LP-model. Dat model heeft ze opgelost met behulp van de 'Oplosser'. Vervolgens heeft ze een rapport van haar bevindingen naar het management gestuurd.

Een aantal resultaten en afgeleide resultaten wordt hier gepresenteerd, zie tabel 1.54. De getallen zijn afgerond op gehele getallen.

Toelichting op tabel 1.54

- De waarden van de beslissingsvariabelen staan in de cellen B2 tot en met B13.
- De productie van component A moet worden ingesteld op 1763 stuks in april, 3237 stuks in mei en 2700 stuks in juni. De eindvoorraad van component A zal dan in juni precies gelijk zijn aan de geëiste 200 stuks.
- De productie van component B moet worden ingesteld op 1624 stuks in april, 2204 stuks in mei en 2071 stuks in juni. Ook de eindvoorraad van component B is dan in juni precies gelijk aan de 200 stuks die worden geëist.
- De totale kosten gaan naar verwachting €215.369 bedragen, zie cel A17.

De benutting van de verschillende capaciteitssoorten staat in de cellen E10 tot en met E18. De maximaal beschikbare capaciteit staat in de cel-

Tabel 1.54 **Resultaten van het eerste planningmodel**

	A	B	C	D	E	F	G
1	Beslissings-variabelen	Waarde		Restricties	Waarde linkerlid		Rechter-lid
2	XA1	1763		vrd bal. apr. A	2000	=	2000
3	XA2	3237		vrd bal. apr. B	1500	=	1500
4	XA3	2700		vrd bal. mei A	3500	=	3500
5	XB1	1624		vrd bal. mei B	2400	=	2400
6	XB2	2204		vrd bal. jun. A	2500	=	2500
7	XB3	2071		vrd bal. jun. B	2000	=	2000
8	SA1	263		eindvrd A	200	>=	200
9	SA2	0		eindvrd B	200	>=	200
10	SA3	200		mach cap apr.	306	<=	400
11	SB1	324		mach cap mei	500	<=	500
12	SB2	129		mach cap jun.	436	<=	450
13	SB3	200		arb cap apr.	202	<=	300
14				arb cap mei	316	<=	320
15				arb cap jun.	280	<=	280
16	Doelfunctie			mag cap apr.	1500	<=	1500
17	215369			mag cap mei	386	<=	1500
18				mag cap jun.	1000	<=	1500

len G10 tot en met G18. Met behulp van deze resultaten kunnen we uitrekenen hoe de bezetting van de capaciteitssoorten zal zijn in de achtereenvolgende maanden.
Over het algemeen kan de bezetting van de diverse capaciteitssoorten goed worden genoemd.

Toch een paar opmerkingen met betrekking tot deze capaciteitsbenutting. De personeelsbezetting in de maand april is aan de lage kant, namelijk 67,3%. In de maand mei is er veel magazijnruimte over, de benutting is dan slechts 23,7%. Ook juni is wat dat betreft niet zo geweldig met een benutting van 66,7%, zie tabel 1.55.

Tabel 1.55 **Bezettingsgraad** (in %) **van de diverse capaciteitssoorten**

Maand	**Bezettingsgraad**		
	Machines	Arbeid	Magazijn
April	76,5	67,3	100,0
Mei	100,0	98,8	23,7
Juni	96,9	100,0	66,7

In de praktijk van alle dag is die lagere benutting van personeel en magazijn niet erg als de HEF nog andere producten maakt dan alleen de componenten A en B. Zowel personeel als magazijnruimte wordt dan ook ingezet voor de productie en de opslag van die andere producten.

Analyse van de oplossing (scenario 2)

Het planningvoorstel van Jacomien is geaccepteerd door de productieafdeling, maar het management heeft nog enige bedenkingen. Het management had gehoopt dat de kosten onder de 200.000 euro zouden blijven. Of Jacomien daar nog even wat aan kan doen.

Omdat het inmiddels april is geworden, is de productieafdeling helemaal ingericht in overeenstemming met het planningvoorstel van Jacomien. Een verandering van de geplande productiehoeveelheden wordt dus bepaald niet in dank afgenomen door de afdeling productie. Jacomien moet dus een kostenreductie zien te vinden in haar planningmodel, zonder dat de huidige oplossing verandert. Dat betekent dus een zorgvuldige bestudering van het gevoeligheidsrapport van de spreadsheet-oplossing uit haar eerste scenario. Ze gaat er voorlopig vanuit dat de productiekosten per eenheid de enige kostensoort is waar mogelijk een kostenbesparing te behalen valt. Besparen op de voorraadkosten is namelijk op de korte termijn nauwelijks mogelijk. Dat betekent dat de voorraadkosten niet langer een vast percentage mogen zijn van de productiekosten. De voorraadkosten moeten dus worden losgekoppeld van de productiekosten.
Het gevoeligheidsrapport is weergegeven in tabel 1.56.

Uit dit rapport blijkt dat de productiekosten van zowel component A als component B omlaag kunnen zonder dat het productieplan verandert. Met behulp van trial and error heeft Jacomien ontdekt dat de totale kosten onder de 200.000 euro komen als de productiekosten van zowel component A als component B in de maanden mei en juni met 10 procent omlaag gaan. Het productieplan verandert dan niet. Met deze verlaging van de productiekosten wordt niet voldaan aan de 100%-regel! Het was dus een kwestie van uitproberen of het productieplan zou veranderen of niet. De productieafdeling moet overigens onderzoeken of zo'n kostenreductie realiseerbaar is.

Tabel 1.56 **Gevoeligheidsrapport van scenario 1**

Cel	Naam	Eind-waarde	Gereduceerde kosten	Coëfficiënt doelfunctie	Toegestane toename	Toegestane afname
$B$2	XA1	1763	0	20	1E+30	1,125
$B$3	XA2	3237	0	20	1,125	46,125
$B$4	XA3	2700	0	20	3,765	26,5
$B$5	XB1	1624	0	10	0,9	1E+30
$B$6	XB2	2204	0	10	36,9	0,9
$B$7	XB3	2071	0	10	4,92	5,27
$B$8	SA1	263	0	3	1E+30	1,125
$B$9	SA2	0	4	3	1E+30	3,76
$B$10	SA3	200	0	3	1E+30	26,5
$B$11	SB1	324	0	1,5	0,9	1E+30
$B$12	SB2	129	0	1,5	5,27	4,92
$B$13	SB3	200	0	1,5	1E+30	16,42

Begrippenlijst bij hoofdstuk 1

Een sterretje (*) achter een woord (begrip) betekent dat dit woord (begrip) apart gedefinieerd wordt in de lijst.

100%-regel (100% rule)
Zie Honderd-procent-regel.

0-1-programmering (0-1 programming)
Een wiskundige techniek om een LP-vraagstuk op te lossen onder de voorwaarde dat één of meer beslissingsvariabelen* de waarde 0 of 1 heeft/hebben.

Actieve restrictie (active restriction)
Een restrictie* waarvan het linker- en rechterlid even groot zijn. Doorgaans betekent dit dat een bepaalde capaciteit volledig is benut.

Antwoordrapport (answer report)
Het rapport waarin de 'Oplosser'* (in een spreadsheet) de gevonden optimale oplossing weergeeft.

Beperking (constraint)
Zie Restrictie.

Beslissingsvariabele (decision variable)
Een grootheid die door de beslisser kan worden aangepast om de doelfunctie* te optimaliseren.

Bindende restrictie (binding restriction)
Zie Actieve restrictie.

Doelfunctie (objective function)
Een lineaire functie die in een LP-vraagstuk* moet worden geminimaliseerd of gemaximaliseerd.

Geheeltallige lineaire programmering (Integer linear programming)
Een wiskundige techniek om een LP-vraagstuk* op te lossen onder de voorwaarde dat één of meer beslissingsvariabelen geheeltallig zijn.

Gereduceerde kosten (reduced costs)
De kosten die worden gemaakt om één eenheid te maken van een product dat in de optimale situatie niet wordt gemaakt.

Gevoeligheidsanalyse (sensitivity analysis)
Een wiskundige techniek waarmee de gevoeligheid van de oplossing van een LP-vraagstuk* voor veranderingen in de doelfunctie en de restricties kan worden beschreven.

Gevoeligheidsrapport (sensitivity report)
Het rapport waarin de 'Oplosser'* (in een spreadsheet) de resultaten van de gevoeligheidsanalyse* weergeeft.

Grafische methode (graphical method)
Een wiskundige techniek om met behulp van grafieken een LP-vraagstuk* op te lossen.

Honderd-procent-regel (hundred percent rule) Een regel in de lineaire programmering* die aangeeft wanneer de oplossing* onveranderd blijft als tegelijk meerdere veranderingen optreden in doelfunctie* of restricties*.

Intuïtieve methode (intuitive method) Een manier om zonder een volledige berekening een oplossing* voor een LP-vraagstuk* te bepalen.

Lineaire programmering (linear programming) Een wiskundige techniek om een lineaire* doelfunctie* te optimaliseren, gegeven een aantal lineaire* restricties*.

Lineaire functie (linear function) Een formule waarin veranderingen van de variabelen evenredig zijn met veranderingen in de functie. Zo'n formule heeft de vorm:
$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \ldots$

LP-model (LP model) Een wiskundig model* van een LP-vraagstuk*.

LP-vraagstuk (LP problem) Een vraagstuk waarin die waarden voor beslissingvariabelen* moeten worden gevonden die de (lineaire) doelfunctie* optimaliseren zodanig dat aan alle (lineaire) restricties* is voldaan.

Niet-lineair model (non-linear model) Een wiskundig model* waarbij de doelfunctie* en/of één of meer restricties* niet lineair* zijn in de beslissingsvariabelen*.

Objectfunctie (objective function) Zie Doelfunctie.

Oplosser (solver) Een optie ingebouwd in spreadsheets om onder andere LP-vraagstukken op te lossen. (Zie bijlage III.)

Optimale oplossing (optimal solution) De verzameling waarden van beslissingsvariabelen* die de doelfunctie* optimaal maakt en die voldoet aan alle restricties*.

Randvoorwaarde (restriction) Zie Restrictie.

Restrictie (constraint) Lineaire* vergelijking of ongelijkheid die een beperking oplegt aan de verzameling van beslissingsvariabelen*.

Schaduwprijs (shadow price) De extra verhoging van de doelfunctie* bij een verruiming van de restrictie* met één eenheid.

Simplexmethode (simplex algorithm) Een wiskundige techniek om een oplossing* te bepalen van een LP-vraagstuk*.

Solver Zie Oplosser.

Speling (slack) Het verschil tussen rechter- en linkerlid van een restrictie, in de optimale oplossing.

Toelaatbaar gebied (feasible area) Alle combinaties van beslissingsvariabelen* die allemaal voldoen aan alle restricties*.

Toelaatbare oplossing (feasible solution)
Een combinatie van beslissingsvariabelen* die voldoet aan alle restricties*, maar die niet noodzakelijkerwijs de doelfunctie* optimaliseert.

Werkbare oplossing (feasible solution)
Term die de Oplosser* hanteert voor: toelaatbare oplossing*.

Wiskundig model (mathematical model)
Een beschrijving van een praktisch probleem met behulp van wiskundige vergelijkingen en/of ongelijkheden.

Uitwerkingen oefeningen Hoofdstuk 1

Oefening 1.1
In de fabricage:
10 dozen T-shirts = 10×2 uur = 20 uur.
20 dozen overhemden = 20×1 uur = 20 uur.
Totaal: 40 uur = $40/100 \times 100\%$ = 40%.
In de verpakking:
10 dozen T-shirts = 10×1 uur = 10 uur.
20 dozen overhemden = 20×2 uur = 40 uur.
Totaal: 50 uur = $50/80 \times 100\%$ = 62,5%.

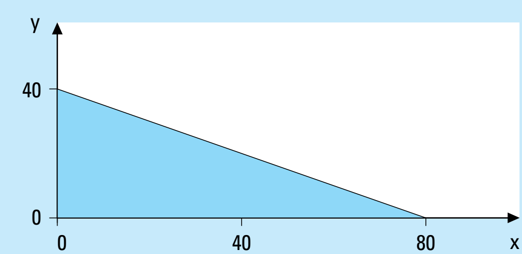
Oefening 1.2
Het model is gegeven door:
max $w = 30x + 20y$

$$\begin{array}{llll} \text{m.b.t.} & 2x + y & \le 100 & \text{[fabricage]} \\ & x + 2y & \le 80 & \text{[verpakken]} \\ & x, y & \ge 0 & \end{array}$$

Alleen T-shirts maken betekent: $y = 0$. Dus geldt dan: $2x \le 100$ én $x \le 80$.
Dus $x = 50$. De bijdrage is dan: $30 \times 50 = 1500$.
Over op fabricage: $100 - 2 \times 50 = 0$ uur. Over op verpakken:
$80 - 1 \times 50 = 30$ uur.

Oefening 1.3
Het maken van 1 doos overhemden kost 2 uur verpakken. Het inleveren van $\frac{1}{2}$ doos T-shirts levert op $\frac{1}{2}$ uur verpakken. De ruil kost dus $1\frac{1}{2}$ uur extra.

Oefening 1.4
De restrictie voor verpakken is: $x + 2y \le 80$. Als vergelijking voor een rechte lijn is dat: $y = -\frac{1}{2}x + 40$.



Het blauwe gebied in de figuur is het toelaatbare gebied met betrekking tot deze restrictie.

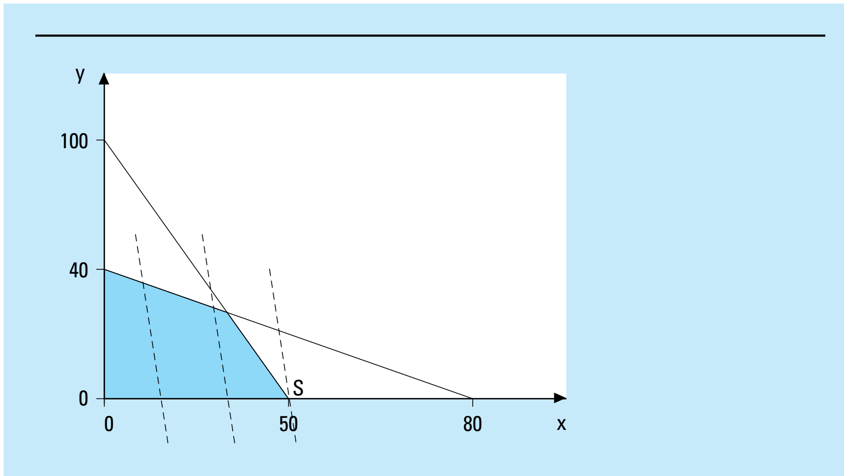
Oefening 1.5

Het model is gegeven door:

max w = 30x + 10y

$$\begin{array}{lrl} \text{m.b.t.} & 2x + y \leq 100 & \text{[fabricage]} \\ & x + 2y \leq 80 & \text{[verpakken]} \\ & x, y \geq 0 & \end{array}$$

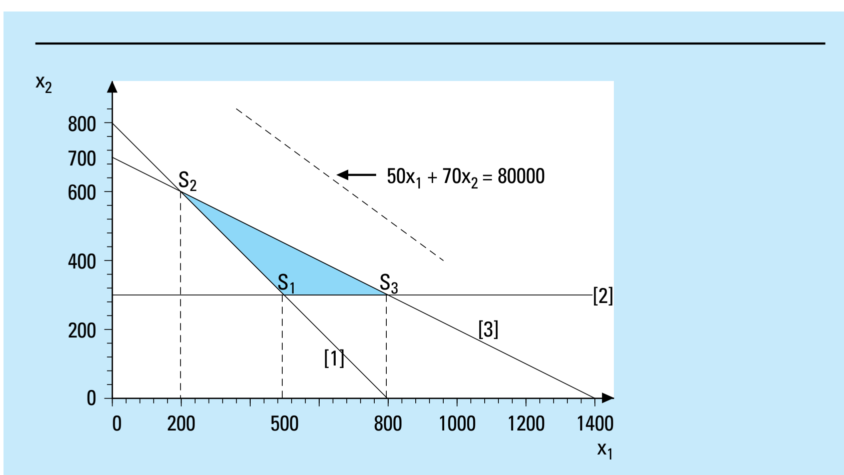
De doelfunctie als vergelijking van een rechte lijn is: y = –3x + w/10. In de volgende figuur is één en ander getekend. De stippellijnen stellen de doelfunctie voor bij diverse waarden van w.



Het optimumpunt S is: x = 50 en y = 0, met w = 1500. Er worden nu dus geen overhemden gemaakt (immers y = 0).

Oefening 1.6

a Het toelaatbare gebied is getekend in de volgende figuur. De stippellijn is de doelfunctie bij kosten K = 80000.



b Geen enkel punt op de lijn van die doelfunctie is een toelaatbaar punt.

c Kosten in S_1, snijpunt van [1] en [2]: $x_1 + x_2 = 800$ en $x_2 = 300$.
Dus $x_1 = 500$ en $x_2 = 300$. Met kosten: 47500.
Kosten in S_2, snijpunt van [1] en [3]: $x_1 + x_2 = 800$ en $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 700$.
Dus $x_1 = 200$ en $x_2 = 600$. Met kosten: 52000.
Kosten in S_3, snijpunt van [2] en [3]: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 700$ en $x_2 = 300$.
Dus $x_1 = 800$ en $x_2 = 300$. Met kosten: 61000.
Het punt S_1 is dus het optimumpunt.

Oefening 1.7

a Actieve restricties zijn: [1] (enquêtes totaal) en [2] (enquêtes avond). Dat wil zeggen dat in de optimale situatie rechterlid en linkerlid van deze restricties even groot is. Met andere woorden: het totale aantal enquêtes en het aantal enquêtes 's avonds worden minimaal gehouden.

b Er zijn $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \times 500 + 300 = 550$ uren gebruikt van de 700 die beschikbaar zijn.

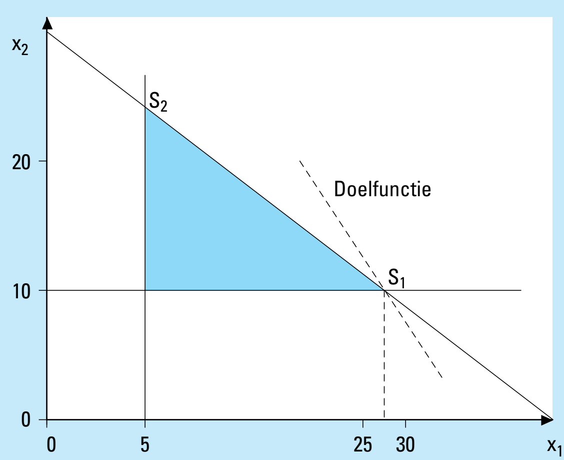
Oefening 1.8

Het model is gegeven door:

max $w = 60x_1 + 40x_2$

m.b.t.	$4x_1 + 4x_2$	≤ 150	[cap. beperking]
	x_1	≥ 5	[afzet verjaarskaarten]
	x_2	≥ 10	[afzet wenskaarten]

a De grafische oplossing staat in de volgende figuur.



S_1 is het optimumpunt, het snijpunt van de vergelijkingen $x_2 = 10$ en $4x_1 + 4x_2 = 150$. Dat is het punt $x_1 = 27{,}5$ en $x_2 = 10$. De winst is dan $60 \times 27{,}5 + 40 \times 10 = 2050$ eurocenten.

b Als de doelfunctie is: $w = 60x_1 + 60x_2$, dan loopt de doelfunctie evenwijdig met de capaciteitsbeperking. Elk punt op het lijnstuk S_1S_2, zie figuur, is dan optimaal met winst gelijk aan: $w = 60 \times 27{,}5 + 60 \times 10 = 2250$ eurocent.

Oefening 1.9

Het model is gegeven door:

max w = $40x_1 + 60x_2$

m.b.t. $4x_1 + 4x_2 \leq 150$ [cap. beperking]

$x_1 \geq 5$ [afzet verjaarskaarten]

$x_2 \geq 10$ [afzet wenskaarten]

Het spreadsheetmodel is gegeven in de volgende tabel.

Tabel **Spreadsheetmodel oefening 1.9**

	A	B	C	D
1	**Gegevens**			
2		Verjaarskaart	Wenskaart	Beschikbaar
3	Bijdrage winst	40	60	
4	prod.tijd (min)	4	4	150
5	Minimale afzet	5	10	
6				
7	**Besl. var.:**		**Doel:**	Max winst
8	Verjaarskaart	5		2150
9	Wenskaart	32,5		
10				
11	**Restricties:**			
12	Capaciteit	150	<=	150
13	Afzet verjaarskaart	5	>=	5
14	Afzet wenskaart	32,5	>=	10

De oplossing is: maak 5 verjaarskaarten en 32,5 wenskaarten, zie cel B8 en B9. De maximale winst is dan 2150 eurocent, zie D8.

Het antwoordrapport en het gevoeligheidsrapport zijn weergegeven in de volgende tabellen.

Tabel **Antwoordrapport**

Doelcel (Max)

Cel	**Naam**	**Oorspronkelijke waarde**	**Eindwaarde**
\$D\$8	Max winst	0	2150

Aanpasbare cellen

Cel	**Naam**	**Oorspronkelijke waarde**	**Eindwaarde**
\$B\$8	Verjaarskaart	0	5
\$B\$9	Wenskaart	0	32,5

Restricties

Cel	**Naam**	**Celwaarde**	**Formule**	**Status**	**Speling**
\$B\$12	Capaciteit	150	\$B\$12<\$D\$12	Bindend	0
\$B\$13	Afzet verjaarskaart	5	\$B\$13>\$D\$13	Bindend	0
\$B\$14	Afzet wenskaart	32,5	\$B\$14>\$D\$14	Niet-bindend	22,5

Tabel **Gevoeligheidsrapport**

Aanpasbare cellen

Cel	**Naam**	**Eind-Waarde**	**Gereduceerde kosten**	**Coëfficiënt doelfunctie**	**Toegestane toename**	**Toegestane afname**
$B$8	Verjaarskaart	5	0	40	20	1E+30
$B$9	Wenskaart	32,5	0	60	1E+30	20

Restricties

Cel	**Naam**	**Eind-waarde**	**Schaduw-prijs**	**Rechterzijde restrictie**	**Toegestane toename**	**Toegestane afname**
$B$12	Capaciteit	150	15	150	1E+30	90
$B$13	Afzet verjaarskaart	5	–20	5	22,5	5
$B$14	Afzet wenskaart	32,5	0	10	22,5	1E+30

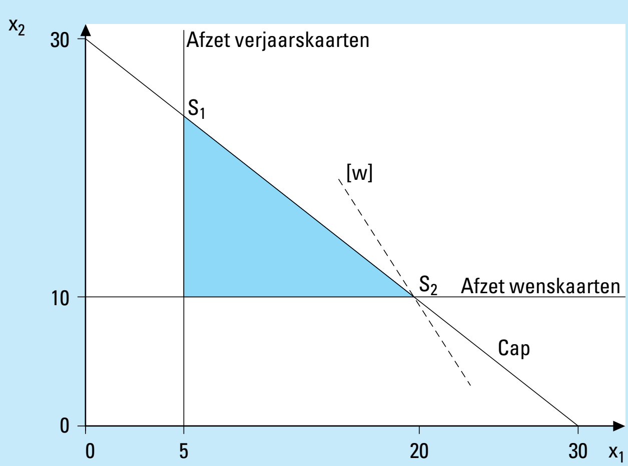
Oefening 1.10

Het model wordt gegeven door:

$$\max w = 60x_1 + 40x_2$$

$$\begin{array}{llll} \text{m.b.t.} & 4x_1 + 4x_2 & \leq 120 & \text{[cap. beperking]} \\ & x_1 & \geq 5 & \text{[afzet verjaarskaarten]} \\ & x_2 & \geq 10 & \text{[afzet wenskaarten]} \end{array}$$

De grafische oplossing staat in de volgende figuur.



De optimale oplossing is het punt S_2, het snijpunt van de capaciteitsbeperking en de afzetbeperking op wenskaarten. We lossen het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ \qquad\quad x_2 = 10 \end{cases}$$

We vinden: $x_1 = 20$ en $x_2 = 10$. De winst is dan: $w = 1200 + 400 = 1600$.

Oefening 1.11
Het model wordt gegeven door:

max w = $60x_1 + 40x_2$

$$\begin{array}{llll} \text{m.b.t.} & 4x_1 + 4x_2 & \leq 120 & [1] \\ & x_1 & \geq 5 & [2] \\ & x_2 & \geq 10 & [3] \end{array}$$

Het optimum is: $x_1 = 20$ en $x_2 = 10$. De winst is dan: w = 1200 + 400 = 1600. Bepalen van de schaduwprijs van restrictie [1] gaat als volgt. Rechterlid van [1] met één eenheid ophogen en het model opnieuw oplossen. Dat wil zeggen: bepaal de oplossing van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 121 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

We vinden: $x_1 = 20{,}25$ en $x_2 = 10$. De winst is dan: w = $60 \times 20{,}25 + 40 \times 10$ = 1615. De winst is toegenomen met: 1615×1600 =15 eurocent. En dat is precies de schaduwprijs.

Oefening 1.12
Als het rechterlid van de capaciteitsrestrictie (restrictie [1]) minder is dan 60, valt die restrictie buiten het huidige toelaatbare gebied. We krijgen dan een model met tegenstrijdige eisen. Dan is er dus geen oplossing mogelijk.

Oefening 1.13
De toegestane afname is oneindig, zie tabel 1.5. Maar de winst op een wenskaart moet natuurlijk wel positief blijven, anders zal de mini-onderneming er niet aan beginnen om dat soort wenskaarten te maken. De toegestane toename, zie eveneens tabel 1.5, is 20. Dus mag de winst oplopen tot 40 + 20 = 60 zonder dat het huidige productieplan verandert.

Oefening 1.14
Het nieuwe beleggingsmodel is het oorspronkelijke model, maar zonder de risicobeperking. Dat nieuwe model ziet er als volgt uit:

Maximaliseer ROI = 0,085 × Shell + 0,095 × Esso + 0,060 × DSM + 0,075 × Akzo + 0,045 × Stobl

m.b.t. Shell + Esso + DSM + Akzo + Stobl	≤ 100.000	[budget]
Shell + Esso	≤ 50.000	[olie]
DSM + Akzo	≤ 50.000	[chemie]
Stobl	≥ 0,25 × (DSM + Akzo)	[obligaties]
alle variabelen	≥ 0	

Van dit nieuwe model maken we een spreadsheet en bepalen we de oplossing met behulp van de ‘Oplosser’, zie de volgende tabel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Budget:**	100000						
2								
3	**variabelen**	**rendement**	**investering**		**restricties**			
4	shell	0,085	0		budget	=SOM(C4:C8)	<=	=B1
5	esso	0,095	50000		olie	=(C4+C5)	<=	=0,5*B1
6	dsm	0,06	0		chemie	=(C6+C7)	<=	=0,5*B1
7	akzo	0,075	40000		obligaties	=C8	>=	=0,25*(C6+C7)
8	stobl	0,045	10000					
9								
10	Max.opbr.	=SOMPRODUCT						
		(B4:B8;C4:C8)						

De optimale oplossing is dan, zie tabel: De maximale opbrengst is hoger dan in het oorspronkelijke probleem. Intuïtief is dat ook duidelijk, immers er zijn minder stringente eisen gesteld aan dit model, want er is een eis minder.

Variabelen	**Investering**
shell	0
esso	50000
dsm	0
akzo	40000
stobl	10000
Max. opbr.	8200

Oefening 1.15

a De schaduwprijs van de chemie-restrictie is nul. Dit betekent dat we in de optimale oplossing minder investeren in chemie dan de toegestane 50.000 euro. En inderdaad, we investeren slechts 40.000 euro. Een verhoging van de toegestane investering heeft dus geen zin.

b De schaduwprijs van de olie-restrictie is 0,0215. Dat wil zeggen: op elke euro die we extra investeren in olie verdienen we 0,0215 euro. Dit blijft gelden tot we in totaal 50.000 euro in olie extra hebben geïnvesteerd, de toegestane toename is immers 50.000 euro.

Oefening 1.16

Gevoeligheid van de oplossing voor veranderingen op het rendement op staatsobligaties, zie tabel 1.10. De toegestane afname is 0,345. De toegestane toename is 0,030. Dit betekent dat de huidige oplossing geldig blijft zolang het rendement op staatsobligaties in blijft liggen tussen (0,045 – 0,345) en (0,045 + 0,030) ofwel tussen – 0,3 en 0,075.
Reëler is het natuurlijk om te zeggen dat de huidige oplossing geldig blijft zolang het rendement op staatsobligaties onder de 0,075 blijft liggen.

Opgaven hoofdstuk 1

Opgave 1
Een onderneming heeft een fabriekshal waarin twee onderdelen van een bepaald product worden gemaakt. We noemen die onderdelen voor het gemak A en B. Beide onderdelen moeten drie bewerkingen ondergaan, namelijk boren, draaien en frezen. Als planningperiode kiezen we een maand.
De beschikbare capaciteit drukken we uit in boor-, draai- en frees-uren. Hoeveel beslag er wordt gelegd op de beschikbare capaciteit om één eenheid van ieder onderdeel te maken, staat in tabel 1.57. Bovendien wordt in die tabel ook aangegeven hoe groot de maximaal beschikbare capaciteit is in de planningperiode.

Tabel 1.57 **Capaciteitsbeslag per eenheid** (in uren)

	Onderdeel A	Onderdeel B	Beschikbaarheid maximaal
Boren	2	1	140
Draaien	1	2	160
Frezen	1	1	90

De kostencalculator van de onderneming heeft berekend dat de dekkingsbijdrage per eenheid A 30 euro bedraagt en per eenheid B 20 euro. Dekkingsbijdrage is: winst minus variabele kosten.
De productiemanager vraagt zich nu af hoeveel onderdelen A en/of B er in de betreffende planningperiode kunnen worden gemaakt als de totale dekkingsbijdrage zo groot mogelijk moet zijn.

a Bepaal het LP-model waarmee dit probleem kan worden opgelost.
b Bepaal de intuïtieve oplossing.
c Bepaal de grafische oplossing.

Opgave 2
Een fabrikant van fietsen en bromfietsen maakt deze producten via twee productielijnen. In een bepaalde periode is op productielijn 1 maximaal 120 uur beschikbaar, op de andere productielijn is dat 180 uur. Het maken van een fiets vergt 6 uur op productielijn 1 en ook nog eens 3 uur op lijn 2. Voor een bromfiets zijn deze getallen respectievelijk 4 en 10 uur.
De dekkingsbijdrage voor een fiets bedraagt €90, voor een brommer €110.

a Formuleer de doelstellingsfunctie als maximalisatie van de dekkingsbijdrage het doel is.
b Formuleer de randvoorwaarden.
c Los dit probleem grafisch op.
d Welke beperkingen zijn actief?

Opgave 3

Een bedrijf maakt twee producten, A en B. Het heeft hiervoor arbeid beschikbaar in de vorm van personeel, kapitaal in de vorm van geld en machines in de vorm van machine-uren.

Om één eenheid A te maken heeft het bedrijf nodig: 2 man personeel, 4 geldeenheden en 1 machine-uur. Voor één eenheid B is dat: 3 man, 4 geldeenheden en 3 machine-uren.

In een bepaalde planningperiode heeft het bedrijf de beschikking over maximaal 120 man personeel, 200 geldeenheden en 105 machine-uren. De dekkingsbijdrage is €40 per eenheid A en €50 per eenheid B. Deze dekkingsbijdrage dient te worden gemaximaliseerd.

a Formuleer de doelstellingsfunctie.
b Formuleer de randvoorwaarden.
c Los het probleem grafisch op.
d Welke randvoorwaarden zijn actief?
e Is er in de optimale oplossing nog capaciteit over? Zo ja, hoeveel van welke capaciteitssoort?
f Wat wordt de oplossing als de dekkingsbijdrage per eenheid A ook €50 wordt?

Opgave 4

Een klein bedrijf is gespecialiseerd in het maken van hoogwaardige tuners en versterkers. De winst op deze twee producten wordt geschat op €200 voor een versterker en €600 voor een tuner. Per dag kan het bedrijf niet meer dan 9 versterkers en niet meer dan 5 tuners maken. Men heeft per dag niet meer dan 16 mandagen ter beschikking. Een versterker vereist 1 mandag arbeid en een tuner 2 mandagen. Wegens afzetverplichtingen moeten minstens 4 versterkers per dag worden geproduceerd.

a Als maximalisatie van de winst het doel is, formuleer dan het LP-model. Noem x_1 en x_2 respectievelijk het aantal te produceren versterkers en tuners.
b Los het model op met behulp van de grafische methode.
c Bepaal de schaduwprijs van de capaciteitsrestrictie van de tuners.
d Waarom wordt bij twee eenheden capaciteitsuitbreiding van de tuners geen 2 keer €200 extra verdiend?

Opgave 5

Deze opgave is een bewerking van een vraagstuk uit het wiskundetijdschrift Euclides, jaargang 1992.

Drie soldaten zijn 60 km verwijderd van de kazerne. Ze hebben drie uur de tijd om terug te keren. Daartoe beschikken ze over één motorfiets, waarop slechts twee soldaten kunnen plaatsnemen. De soldaten lopen met een snelheid van 5 km/uur. De motor rijdt met een (gemiddelde) snelheid van 50 km/uur.

a Toon aan dat er moet worden gelopen om op tijd in de kazerne terug te zijn.
b Bepaal een geheeltallige oplossing voor dit probleem. Veronderstel dat de motor soldaat 1 tot op a km van de kazerne brengt en dat soldaat 1 die resterende a km lopend aflegt. Veronderstel dat soldaat 2 een afstand van b km heeft gelopen en dan door de motor wordt opgepikt.
c Gebruik de onbekenden a en b uit onderdeel b) als beslissingsvariabelen van een LP-probleem. Formuleer het probleem als een LP-probleem, waarbij met de motor zo min mogelijk dient te worden gereden. Los dit probleem ook op.

d Bepaal ook de oplossing waarbij de soldaten evenveel, maar zo weinig mogelijk willen lopen.

e Veronderstel dat we de tijd nodig om in de kazerne te komen, willen minimaliseren. Herformuleer het probleem met als extra beslissingsvariabele de tijd t en los het probleem op.

Opgave 6

Een variant van het bekende dieetprobleem is de volgende. Een huisman wil een maaltijd samenstellen bestaande uit aardappelen en groente. Per eenheid kosten de aardappelen €2 en de groente €4.
Een maaltijd is verantwoord te noemen als er voldoende vitaminen in zitten. Minimaal moeten er 108 eenheden vitamine A, 144 eenheden vitamine B en 80 eenheden vitamine C in elke maaltijd aanwezig zijn. Per eenheid aardappelen zitten er 18 eenheden vitamine A, 12 eenheden vitamine B en 4 eenheden vitamine C in. Voor de groente is dat respectievelijk 6, 12 en 20. De huisman wil een zo goedkoop mogelijke maaltijd, maar er moet wel aan alle eisen met betrekking tot de vitaminen zijn voldaan.

a Formuleer het LP-model behorend bij genoemd probleem en verklaar de gebruikte symbolen.

b Los het probleem op met behulp van Excel.

c Bepaal de gevoeligheid van de oplossing met betrekking tot veranderingen in de kosten van de aardappelen en de groente.

Opgave 7

Een machinefabriek heeft de beschikking over een machinepark ter vervaardiging van scheepsonderdelen. De gegevens over deze machines staan in tabel 1.58.

Tabel 1.58 **Machineparkgegevens**

Type	Aantal	Beschikbare uren per week en per machine	Uurtarief (euro)
Draaibank	10	40	30
Freesmachine	3	40	30
Schaafbank	4	38,75	50
Boormachine	8	37,50	25

De machinefabriek draait al enige tijd met forse verliezen. Maar scheepswerf 'De Honte' heeft contact gezocht en gevraagd of de machinefabriek als toeleveringsbedrijf voor De Honte wil gaan werken. Het gaat om de productie van schroefassen, krukassen en drijfstangen, waarvoor De Honte bereid is te betalen respectievelijk €1050, €900 en €200 per stuk. Het beslag dat deze drie producten op de diverse machines van de machinefabriek leggen, is weergegeven in tabel 1.59.

Tabel 1.59 **Capaciteitsbeslag in uren per eenheid product**

Product	**Bewerkingen**			
	Draaien	Frezen	Schaven	Boren
Schroefas	20	–	5	6
Krukas	16	8	1	4
Drijfstang	2	–	3	2

De scheepswerf garandeert dat ieder product wordt gekocht, ongeacht de aantallen die gaan worden geproduceerd. Er moeten echter minimaal tien drijfstangen en tien krukassen worden geproduceerd.

a Moet de directie van de machinefabriek op dit voorstel ingaan? De uurtarieven worden als de te maken kosten beschouwd.

b Veronderstel dat de machinefabriek ook nog het aanbod krijgt om een bepaald soort koppelstukken te maken, waarvoor per eenheid 4 draaiuren, 2 freesuren en 5 booruren nodig zijn. Bij welke bijdrage per koppelstuk wordt het dan aantrekkelijk dit product te produceren?
Aanwijzing: Een soortgelijke opgave wordt behandeld in bijlage II over duale problemen.

Opgave 8
Een oliemaatschappij produceert onder andere normale en superbenzine uit drie aardoliecomponenten. De verkoopprijzen per liter zijn €0,50 voor de normale benzine en €0,54 voor de super. Accijnzen zijn hier buiten beschouwing gelaten. De kosten per liter van de drie aardoliecomponenten en de beschikbare hoeveelheden van die componenten voor de komende week staan in tabel 1.60.

Tabel 1.60 **Beschikbaarheid en kosten aardoliecomponenten**

Aardolie	**Kosten per liter** (euro)	**Maximaal beschikbaar** (liters)
Component 1	0,25	5 000
Component 2	0,30	10 000
Component 3	0,42	10 000

Uiteraard moeten zowel de normale als de superbenzine aan bepaalde specificaties voldoen. Deze eisen staan in tabel 1.61.

Tabel 1.61 **Productspecificaties**

Product	**Specificatie**
Normale benzine	≤ 30% van component 1 ≥ 40% van component 2 ≤ 20% van component 3
Superbenzine	≥ 25% van component 1 ≤ 40% van component 2 ≥ 30% van component 3

Er moet deze week minstens 10 000 liter normale benzine worden verkocht.

a Formuleer een LP-model voor deze situatie als maximalisatie van de winst het doel is.

b Los het model op met behulp van Excel.

c Hoe ziet het optimale mengprogramma er uit?

Opgave 9

De firma Verdund importeert drie zogenoemde ‘grades’, die we A, B en C noemen. Deze grades worden volgens een bepaald mengschema vermengd tot ‘blends’. De blends worden verkocht onder de namen ‘Middle Burgh’ en ‘Flushing High’. De specificaties en de verkoopprijs staan in tabel 1.62.

Tabel 1.62 **Specificaties en prijs**

Blend	**Specificatie**	**Prijs per liter** (euro)
Middle Burgh	> 60% A ≤ 20% C	26,80
Flushing High	> 60% C ≤ 15% A	25,70

De maximaal mogelijke aanvoer van de drie grades staan, samen met de kosten, in tabel 1.63.

Tabel 1.63 **Aanvoergegevens en kosten**

Grade	**Max. aanvoer per week in liters**	**Kosten per liter** (euro)
A	3000	27
B	4000	25
C	2000	24

a In welke hoeveelheden moeten de merken Middle Burgh en Flushing High worden geproduceerd als maximalisatie van de winst het doel is?
b Hoeveel moet dan van de diverse grades worden aangevoerd, aannemende dat alles kan worden verkocht?

Opgave 10
Dit vraagstuk gaat over het beroemde (beruchte) probleem van de sub-optimalisatie.
Een bedrijf heeft twee afdelingen, A en B. In iedere afdeling worden twee dezelfde eindproducten gefabriceerd, een standaardproduct en een luxe product. De planningperiode is een week. De bijdrage aan de winst is in beide afdelingen hetzelfde, en wel voor het standaard product 45 euro en voor het luxe product 60 euro. Iedere afdeling heeft twee productieprocessen, namelijk slijpen en polijsten. Afdeling A heeft een slijpcapaciteit van 200 uur per week en een polijstcapaciteit van 160 uur per week. Voor afdeling B zijn deze capaciteiten 200 uur en 150 uur. De slijp- en polijsttijden in uren die nodig zijn om één eenheid van ieder type eindproduct te maken, zijn gegeven in tabel 1.64.

Tabel 1.64 **Capaciteitsbeslag** (in uren)

	Afdeling A		**Afdeling B**	
	Standaard	Luxe	Standaard	Luxe
Slijpen	5	2	4	2
Polijsten	2	4	2	3

Voor elke eenheid eindproduct is 3 kg grondstof nodig. De onderneming kan iedere week over 324 kg grondstof beschikken, waarvan 144 kg in afdeling A en 180 kg in afdeling B. Het doel van de onderneming is om een zodanig productieprogramma te maken, per week, dat de totale bijdrage aan de winst zo groot mogelijk is.
a Maak een LP-model voor afdeling A en los dit model op.
b Maak een LP-model voor afdeling B en los dit model op.
c Maak één LP-model van afdeling A en B samen, door de grondstof *niet bij voorbaat al* toe te delen aan elke afdeling. Los dit probleem op met behulp van Excel.
d Is het mogelijk om de bijdrage aan de winst voor beide producten met 15% te verhogen zonder het productieprogramma van onderdeel c te veranderen? Gebruik bij de beantwoording de 100%-regel.

Opgave 11
Beschouw het volgende LP-probleem, waarin twee producten A en B moeten worden geproduceerd in een bepaalde planningperiode met behulp van machines en personeel. De coëfficiënten van de doelfunctie stellen de dekkingsbijdrage (opbrengst minus variabele kosten) in euro's per eenheid voor van de twee producten.
Maximaliseer $z = 45x_1 + 90x_2$

m.b.t.	$2x_1 + x_2 \leq 140$	[machinerestrictie]
	$2x_1 + 3x_2 \leq 240$	[personeelsrestrictie]
	$x_1, x_2 \geq 0$	[positiviteit]

a Bedenk zinvolle betekenissen voor alle getalswaarden in dit probleem en voor de gebruikte variabelen. Ga vervolgens na dat de optimale oplossing is: $x_1 = 0$, $x_2 = 80$ met $z_{max} = 7200$. Waar is nog capaciteit over en hoeveel?
b Bepaal de gereduceerde kosten voor de variabelen x_1 en x_2.
c Bepaal de schaduwprijzen van de restricties.
d Bepaal met behulp van Excel, maar ook grafisch, met hoeveel personeelsleden het bedrijf kan uitbreiden, zonder dat de schaduwprijs van de personeelsrestrictie verandert.

Opgave 12
Een groep studenten is, dankzij de goede studie-ervaringen met het thema 'mini-onderneming', voor zichzelf begonnen met een klussenbedrijf. De klussen worden ingedeeld in twee categorieën: elektronica en sanitair. Ze kunnen per week niet meer dan 9 elektronicaklussen aannemen, voor het sanitair is dat aantal maximaal 4 klussen. Ze hebben 24 uur per week beschikbaar, een elektronicaklus kost 2 uur en een sanitairklus 3 uur. Er is een verplichting om minstens 4 elektronicaklussen per week te doen. De winst op een elektronicaklus is 40 euro, maar op een sanitairklus bedraagt die winst 120 euro.
Er zijn meer studenten die mee willen doen in deze onderneming.
a Bepaal de maximale winst.
b Onderzoek of het aantal arbeidsuren een bottleneck is in de optimale situatie.
c Bereken de schaduwprijs van de arbeidsurenrestrictie.
d Onderzoek tot welke uitbreiding de schaduwprijs uit onderdeel c hetzelfde blijft.

Opgave 13
We beschouwen een ondernemer die tijd en geld steekt in zijn bedrijf, waar twee producten A en B worden gemaakt met een opbrengst van respectievelijk 300 en 200 gulden per eenheid product. Hij beschikt in een bepaalde periode over 140 uur om die producten te maken en heeft een budget beschikbaar van 90 geldeenheden. Het produceren van een eenheid A vergt 2 uur en kost 1 geldeenheid. Voor product B is dat 1 uur en 1 geldeenheid.
a Bepaal de optimale oplossing als de opbrengst moet worden gemaximaliseerd.
b Hoe gevoelig is de oplossing voor veranderingen in de opbrengst van A?
c Hoe gevoelig is de oplossing voor veranderingen in de opbrengst van B?

Opgave 14
In een kleine mijn in het voormalige Oostblok worden drie soorten kolen gewonnen uit twee onderaardse lagen. De arbeidskosten in de bovenste laag zijn 1000 euro per dag, in de onderste laag 2500 euro per dag. In de bovenste laag wordt per dag 1 ton parelantraciet, 5 ton gewone antraciet en 2 ton vetkolen gedolven. In de onderste laag is dat per dag 4 ton parelantraciet, 10 ton gewone antraciet en 1 ton vetkolen. Er ligt geen voorraad meer bovengronds.
De mijn krijgt de volgende order: 12 ton parelantraciet, 50 ton gewone antraciet en 12 ton vetkolen, die de bedrijfsleiding tegen minimale arbeidskosten wil laten uitvoeren. Omdat er mogelijk vervolgorders in de wacht kunnen worden gesleept, wil ze ook weten tussen welke waarden de kosten van het werken in de bovenste laag en in de onderste laag mogen variëren zonder dat het optimale productieschema moet worden aangepast.

- **a** Los het probleem zowel grafisch op als met Excel.
- **b** Voer een grafische gevoeligheidsanalyse uit voor de kosten in de bovenste laag. Verifieer het antwoord met behulp van Excel.
- **c** Voer een grafische gevoeligheidsanalyse uit voor de kosten in de onderste laag. Verifieer het antwoord met behulp van Excel.

Opgave 15

Een fabriek maakt drie producten, Alfa, Beta en Gamma. De producten ondergaan bewerkingen in drie afdelingen. Verder vindt er een inspectie plaats en worden ze getransporteerd naar een eindmagazijn. Voor een bepaalde planningperiode moet er worden beslist hoeveel van elk product moet worden geproduceerd. Tabel 1.65 geeft informatie over het productieproces, de winst en het verkooppotentieel.

Tabel 1.65 **Productgegevens**

Product	**Productietijd in uren per eenheid**					**Winst per eenheid**	**Verkoop maximaal**
	Afd. 1	Afd. 2	Afd. 3	Insp.	Transp.		
Alfa	0,30	0,20	0,20	0,04	0,10	42	250
Beta	0,10	0,30	0,20	0,04	0,10	40	400
Gamma	–	0,20	0,10	0,04	0,12	50	600
Capaciteit	150	300	200	100	150		

- **a** Formuleer het LP-model als winstmaximalisatie het doel is.
- **b** Los het probleem op. Welke producten worden er gemaakt en in welke hoeveelheden. Welke afdelingen hebben capaciteit over?
- **c** Welke producten worden in welke hoeveelheden gemaakt als de verkoop geen bottleneck is?
- **d** Wat ‘kost’ het de firma dat de verkoop wel een bottleneck is?
- **e** Wegens afzetverplichtingen moeten minstens 300 stuks van A worden gemaakt, verdere gegevens als in tabel 1.65. Welke consequenties heeft dit voor het bedrijf?
- **f** Uitbreiding van de capaciteit van afdeling 3 kost €150 per uur uitbreiding. Is dit voordelig voor het bedrijf?
- **g** Bepaal de gevoeligheid van de drie producten voor veranderingen in de winst per eenheid.

Opgave 16

De VCF (Verenigde Calculator Fabriek) wil voor de komende drie maanden de productie starten van twee nieuwe calculators. Omdat deze modellen, Y en Z genoemd, een uitbreiding van de productiecapaciteit vereisen, heeft het bedrijf behoefte aan vergroting van het werkkapitaal. Opbrengsten uit de nieuwe productieperiode zijn namelijk pas beschikbaar aan het eind van de periode. Er moet dus worden gefinancierd. VCF heeft €3000 beschikbaar uit eigen middelen om de uitgaven te dekken, maar een locale bank is bereid een krediet te geven tot maximaal €10.000. De rente bedraagt 12% op jaarbasis. Eén van de bepalingen is echter dat het restant aan eigen geld plus de ontvangsten uit de productielijn aan het eind van de periode minstens het dubbele zijn van de lening en de rente op die lening.

Behalve deze financiële beperkingen zijn er ook capaciteitsbeperkingen met betrekking tot assemblage en verpakking. Er zijn slechts 2500 uren voor de assemblage beschikbaar in deze periode en 150 uur voor de verpakking. Relevante gegevens staan in tabel 1.66.

Tabel 1.66 **Productgegevens**

Model	**Var. kosten per eenh.** (euro)	**Verkoopprijs** (euro)	**Winstmarge** (euro)	**Arbeidsuren per eenheid**	
				Assemblage	Verpakking
Y	50	58	8	12	1
Z	100	120	20	25	2

Om de calculator door de markt te laten uitproberen, moeten er minstens 50 van model Y en 25 van model Z worden geproduceerd. Het doel is maximalisatie van de totale winstbijdrage over de periode van drie maanden. Welk productieplan is dan optimaal?

Opgave 17

Een boer wil zijn land ter grootte van 10 hectare bebouwen met haver, aardappelen en bieten. Hij wil nagaan hoeveel hectare per jaar met elk van deze gewassen moet worden bebouwd om een zo hoog mogelijke opbrengst te realiseren. Per hectare is de jaarlijkse opbrengst voor haver 900 euro, voor aardappelen 1200 euro en voor bieten 1700 euro. Hij moet echter rekening houden met een aantal landbouwkundige beperkingen. Voor de zes perioden waarin hij het arbeidsjaar heeft verdeeld, staan de gegevens in tabel 1.67.

Tabel 1.67 **Landbouwgegevens**

Periode	**Benodigde arbeidsuren per hectare**			**Beschikbare uren**
	Haver	Aardappelen	Suikerbieten	
April-mei	3	24	158	372
Juni-juli	–	18	100	315
Augustus	–	5	10	240
September	50	–	–	250
Oktober	–	200	–	372
November	–	–	125	475

Omdat niet altijd hetzelfde gewas op dezelfde grond kan worden verbouwd, mag dit jaar ten hoogste het derde deel van de totale oppervlakte met aardappelen worden bebouwd. Voor suikerbieten en haver is dit respectievelijk het vierde deel en de helft.

a Formuleer een LP-model waarmee de boer zijn doelstelling kan bereiken.

b Los het probleem op met behulp van Excel.

Opgave 18
Een bedrijf produceert twee producten in twee fabriekshallen. Hal 1 heeft vier productieafdelingen en produceert hierin drie halffabrikaten (P). Hal 2 gebruikt deze halffabrikaten voor de productie van de twee eindproducten (Q). In iedere fabriekshal zijn alternatieve routes voor het maken van de halffabrikaten en de eindproducten. De gegevens van hal 1 staan in tabel 1.68.

Tabel 1.68 **Gegevens van hal 1**

Half-fabrikaat	**Alternatieve route**	**Aantal producten per uur**				**Kosten per eenh.** (euro)
		Afd.1	Afd.2	Afd.3	Afd.4	
P1	1	20	10	–	10	100
	2	20	10	10	–	100
P2	1	5	–	20	5	150
	2	5	10	–	10	150
	3	–	10	20	5	150
P3	1	1	2	4	10	200
Beschikbare uren		320	240	220	200	
Kosten per uur (euro)		100	200	300	250	

Om één eenheid eindproduct Q1 te produceren, zijn twee eenheden van halffabrikaat P1 nodig en één eenheid van halffabrikaat P2. Om één eenheid eindproduct Q2 te produceren, is van ieder halffabrikaat één eenheid nodig. De gegevens van fabriekshal 2 staan in tabel 1.69 per week gegeven.

Tabel 1.69 **Gegevens van hal 2**

Eindproduct	**Alternatieve route**	**Aantal producten per uur**	
		Afd.1	Afd.2
Q1	1	2,5	–
	2	–	2
Q2	1	2	1
Beschikbare uren		200	300
Kosten per uur (euro)		600	800

Om aan de vraag te kunnen voldoen, moet men beschikken over minstens 200 stuks van ieder eindproduct. Gevraagd een optimaal productieplan en een bezettingsoverzicht voor de twee hallen.

Opgave 19
Een onderneming produceert in twee fabrieken veevoeders uit de grondstoffen vismeel, tarwe en sojaschroot. De fabrieken zijn gelegen in Amsterdam en Breda. De aanvoerkosten (aankoopprijs + transportkosten) in euro per ton van deze grondstoffen zijn in tabel 1.70 gegeven.

Tabel 1.70 **Aanvoerkosten** (in euro per ton)

	Vismeel	Tarwe	Sojaschroot
In Amsterdam	100	50	75
In Breda	110	45	85

De grondstoffen worden vermengd tot slechts twee soorten veevoeders, namelijk veekoeken en pluimveevoer, die in elke fabriek aan dezelfde specificaties moeten voldoen, zie tabel 1.71.

Tabel 1.71 **Productspecificaties** (in %)

	Veekoeken	Pluim-veevoer
Vismeel	≥ 30	≥ 50
Tarwe	≤ 60	≤ 45
Sojaschroot	–	≤ 10

De maximale mengcapaciteit bedraagt in Amsterdam 800 ton per week en in Breda 600 ton per week. De maximale perscapaciteit voor veekoeken bedraagt in Amsterdam 350 ton per week en in Breda 250 ton per week. De onderneming kan rekenen op een toelevering per week van maximaal 700 ton tarwe, maximaal 300 ton vismeel en maximaal 500 ton sojaschroot.
De verkoopprijs (voor beide fabrieken) van veekoeken is 90 euro per ton en van pluimveevoer 100 euro per ton.

a Formuleer een LP-model waarmee de onderneming haar winst kan maximaliseren als beide veevoeders in onbeperkte mate kunnen worden afgezet.

b Los het model op en vertaal de oplossing in termen die de onderneming begrijpt. Geef tevens aan waar de bottleneck(s) zit(ten).

Opgave 20
Meubelfabriek Huma vervaardigt drie typen houten schommelstoelen: John, Gray en Tren. Tren is van blank hout, de rug en het zitvlak zijn bekleed met een Schotse ruit. Gray is een stoel van gelakt hout, waarbij de spijlen een andere kleur hebben dan het overige hout, en er zit geen bekleding op. John ten slotte is een beklede en in één kleur gelakte stoel. De fabrieksprijzen bedragen 200 euro voor John, 190 euro voor Gray en 220 euro voor Tren. Met de productie zijn vijf afdelingen gemoeid. Het capaciteitsbeslag per type stoel voor de productie van één exemplaar, uitgedrukt in uren per afdeling, staat in tabel 1.72.

Tabel 1.72 **Capaciteitsbeslag** (in uren)

	Hout-bewerking	Lakken	Drogen	Bekleden	Controle + Expeditie
John	6	5	2	1	3
Gray	9	10	4	–	2
Tren	12	–	–	4	1

De capaciteiten van de diverse afdelingen en de vaste en variabele kosten staan in tabel 1.73.

Tabel 1.73 **Capaciteit en kosten**

Afdeling	**Capaciteit in uren per week**	**Vaste kosten per week** (euro)	**Var. kosten per uur** (euro)
Houtbewerking	10 000	12.000	3
Lakken	6 000	6.000	5
Drogen	2 000	3.000	6
Bekleden	2 000	4.000	20
Contr. + Exp.	4 000	6.500	5

Per stoel is aan hout voor John 30 euro nodig, voor Gray 19 euro en voor Tren 29 euro.

a Bepaal voor de directie het productieprogramma met de grootste dekkingsbijdrage (dekkingsbijdrage = opbrengst minus variabele kosten). De markt is onverzadigbaar.

b Bij welke verkoopprijs wordt het aantrekkelijk om type Gray te gaan produceren?

c Voer een gevoeligheidsanalyse uit op de dekkingsbijdrage van de drie typen stoelen.

d Wegens verkoopverplichtingen moeten minstens 200 stoelen van het type Gray worden geproduceerd. Bereken ook voor deze situatie een optimaal productieprogramma.

e Bepaal de bezettingsgraad van de vijf afdelingen voor de situatie van onderdeel d.

Opgave 21

Gegeven het volgende transport tableau, met in de velden de transportkosten (× 100 euro) per eenheid. Verder is gegeven het aanbod in de plaatsen A, B, C en D en de vraag in de bestemmingen P, Q, R en S (vraag en aanbod in eenheden van 1000).

Tabel 1.74

	P	**Q**	**R**	**S**	**Aanbod**
A	10	3	4	6	**10**
B	17	9	14	11	**20**
C	12	6	13	4	**20**
D	12	3	8	1	**15**
Vraag	**20**	**15**	**30**	**15**	

a Bepaal een optimale oplossing als tegen minimale kosten moet worden vervoerd van de aanbodplaatsen naar de bestemmingen.

b Welke bestemmingen krijgen niet wat ze hebben gevraagd?

c Bepaal nogmaals een optimale oplossing als de bestemmingen P en R moeten krijgen wat ze hebben gevraagd.

Opgave 22

Gegeven het volgende transporttableau, waarbij wordt getransporteerd van drie fabrieken in Amsterdam, Breda en Culemborg naar vier magazijnen in

Delft, Eelde, Franeker en Groenlo. Linksboven in elk veld staan de transportkosten per eenheid. De gegeven oplossing is optimaal.

Tabel 1.75

	D	E	F	G	Aanbod
A	3,6 250	8,0	8,4 250	9,6	500
B	3,6	4,8 50	14,8	3,2 200	250
C	3,2 50	6,4 350	8,8	9,6	400
Vraag	300	400	250	200	

Door bedrijfsomstandigheden kan er de komende week niet worden gereden van Breda naar Groenlo en moet er per se worden gereden van Culemborg naar Franeker.

a Bepaal een nieuwe optimale oplossing, rekening houdend met deze bedrijfsomstandigheden.

b Bepaal de extra kosten die de gegeven bedrijfsomstandigheden noodzakelijkerwijs veroorzaken.

Opgave 23

Drie werknemers moeten drie karweien opknappen. De kosten als werknemer i (i = 1,2,3) karwei j (j = 1,2,3) uitvoert, staan in tabel 1.76.

a Formuleer een LP-probleem als de totale kosten minimaal moeten zijn.

b Los dit toewijzingsprobleem op.

Tabel 1.76

Werknemer	Karwei 1	2	3
1	12	27	61
2	23	39	78
3	67	56	92

Opgave 24

Vier werknemers moeten drie karweien opknappen. Er mag slechts één werknemer op een karwei worden ingezet. De kosten als werknemer i karwei j uitvoert, staan in tabel 1.77.

Welke werknemer krijgt welk karwei toegewezen als minimalisatie van de totale kosten het doel is?

Tabel 1.77

Werknemer	Karwei 1	2	3
1	12	27	61
2	23	39	78
3	67	56	92
4	38	42	40

Opgave 25

Drie magazijnen moeten in drie van de volgende vier plaatsen worden gebouwd: Amsterdam, Breda, Creil en Dokkum. De kosten staan in tabel 1.78.

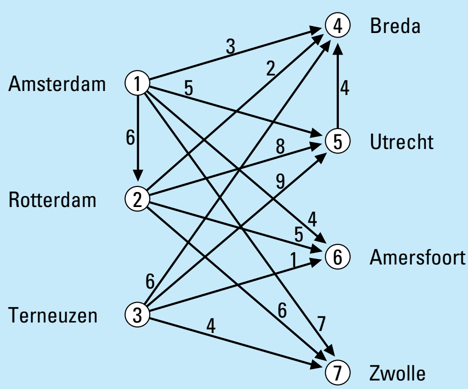
Tabel 1.78 **Magazijnkosten** (× €1 mln)

	Amsterdam	Breda	Creil	Dokkum
Magazijn 1	12	13	14	6
Magazijn 2	6	4	10	11
Magazijn 3	10	9	12	4

Welk magazijn wordt in welke plaats gebouwd als de totale kosten minimaal moeten zijn?

Opgave 26

Gegeven is het volgende netwerk van een transshipment-probleem, waarin containers moeten worden vervoerd van een aantal havens naar een aantal bestemmingen in het binnenland.



De transportmogelijkheden zijn weergegeven met een pijl. De getallen bij de pijlen stellen de transportkosten per eenheid voor. Vraag en aanbod zijn gegeven in tabel 1.79.

a Stel een LP-model op voor dit transshipment-probleem.

b Los het model op met behulp van Excel.

c Vertaal de oplossing in begrijpelijke termen.

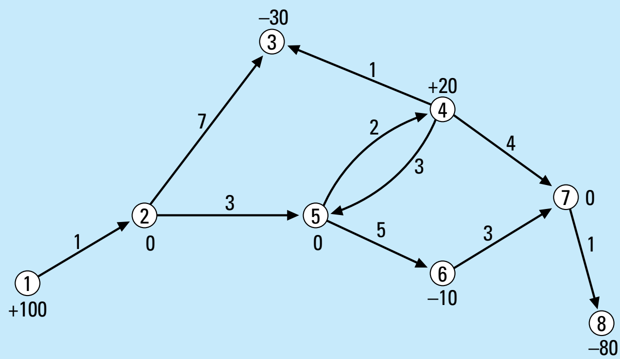
Tabel 1.79 **Vraag en aanbod van containers**

Plaats	Vraag	Aanbod
Amsterdam	–	30
Rotterdam	15	70
Terneuzen	–	40
Breda	20	–
Utrecht	40	15
Amersfoort	50	–
Zwolle	30	–

Opgave 27

De onderneming ‘Ventex’ heeft acht grote warenhuizen, verdeeld over heel Nederland. De centrale verkoopafdeling heeft besloten tot het houden van een reclamecampagne met betrekking tot een van de artikelen, teneinde de

voorraden van dat artikel drastisch te verminderen. Voordat de campagne van start gaat, wil het management de huidige voorraden op iedere locatie afstemmen op de verwachte verkoop. Een herverdeling van voorraden is welhaast zeker het gevolg hiervan.
Na een grondige studie blijkt de situatie te zijn zoals schematisch is weergegeven in de volgende figuur.



Ventex warenhuizen

De knooppunten zijn de warenhuizen, genummerd van 1 tot en met 8. Een positief getal bij een knooppunt geeft aan hoe groot het voorraadoverschot is dat weg moet (naar een andere locatie). Een negatief getal geeft aan hoe groot het voorraadtekort is bij de betreffende locatie.
Een pijl tussen twee knooppunten i en j geeft aan dat er rechtstreeks transport mogelijk is van warenhuis i naar warenhuis j. De getallen bij de pijlen stellen de transportkosten per eenheid voor.
Het doel van de onderneming is om de voorraden zodanig te herverdelen over de warenhuizen, dat de totale transportkosten zo laag mogelijk zijn en dat bovendien voldaan is aan vraag en aanbod van de warenhuizen.

a Maak van dit transshipment-probleem een LP-model.
b Los het model op met behulp van Excel.
c Vertaal de oplossing in begrijpelijke termen.

Opgave 28
Het bedrijf 'Basis' brengt een kastensysteem op de markt. Het programma bestaat uit een aantal verschillende modulen die samen te voegen zijn tot een geheel. De familie Jansma heeft belangstelling voor dit kastensysteem en vindt de zes modulen in tabel 1.80 aantrekkelijk.

Tabel 1.80 **Modulen kastensysteem 'Basis'**

Module	**Omschrijving**	**Opbergruimte** (liter)	**Hoogte** (cm)	**Prijs** (euro)
BA1	dubbele hoge deur	210	80	225
BA2	hoge deur + dubbele open plank	230	80	165
BA3	hoge deur + open plank + laden smal	170	80	295
BA4	dubbel lage deur	95	40	145
BA5	lade breed	30	20	120
BA6	open plank breed	110	40	95

Alle modulen hebben dezelfde breedte. Een kast wordt gevormd door een willekeurige combinatie van modules boven op elkaar te stapelen. De familie Jansma wil een kast van precies 220 cm hoog die minstens 500 liter opbergruimte bevat. Verder wil de familie precies 2 modules die laden bevatten en minstens 3 kastdelen die met deuren kunnen worden afgesloten. (Voor de modulen met meerdere deuren geldt dat module BA1 telt als twee kastdelen en module BA4 – door de geringere hoogte – als één kastdeel)

a Wat is de samenstelling van het goedkoopste kastensysteem dat aan de eisen van de familie Jansma voldoet?

b Als de kast niet 220 maar slechts 200 cm hoog mag zijn, wat wordt dan de goedkoopste combinatie van modulen?

c Indien de familie Jansma hooguit €700 uit wil geven, wat is dan de kast met de meeste opbergruimte die ze kunnen samenstellen? (De hoogte is weer 220 cm, de eis op laden vervalt, de eis op deuren blijft van kracht.)

Opgave 29

Bierbrouwerij Schuim heeft een brouwerij in Lochem waar jaarlijks 30.000 hectoliter bier wordt gebrouwen. Vanuit Lochem wordt het bier naar drie regionale distributiecentra vervoerd in Bern, Frankfurt en Hannover. Vanuit deze distributiecentra gaat het bier naar de uiteindelijke afnemers. Omdat de omzet van Schuim gestaag stijgt, wordt overwogen een tweede brouwerij te openen. Uit een vooronderzoek zijn vier potentiële nieuwe vestigingsplaatsen naar voren gekomen. De voorstellen zien er uit zoals in tabel 1.81 is aangegeven.

Tabel 1.81 **Potentiële nieuwe vestigingsplaatsen brouwerij**

Voorgestelde locatie	**Jaarlijkse vaste kosten** (in duizenden euro's)	**Jaarlijkse capaciteit** (1000 hectoliter)
Düsseldorf	175	15
Turijn	300	20
Salzburg	375	30
Kopenhagen	500	40

De planningsafdeling van de brouwerij schat dat de volgende jaren in de distributiecentra de jaarlijkse vraag zal ontstaan zoals aangegeven in tabel 1.82.

Tabel 1.82 **Schatting jaarlijkse vraag brouwerij**

Distributiecentrum	**Jaarlijkse vraag** (1000 hectoliter)
Bern	30
Frankfurt	20
Hannover	20

De keuze voor de plaats waar een eventuele tweede brouwerij wordt gevestigd, wordt mede bepaald door de vervoerskosten van de tweede brouwerij naar de distributiecentra. De geschatte vervoerskosten staan in tabel 1.83.

Tabel 1.83 **Geschatte vervoerskosten**

Vervoerskosten in euro/hl	**Distributiecentra**		
Brouwerij	Bern	Frankfurt	Hannover
Düsseldorf	5	2	4
Turijn	6	3	10
Salzburg	9	8	8
Kopenhagen	11	7	2
Lochem	9	5	4

Schuim wil nu bepalen op welke plaats men het beste de tweede brouwerij kan plaatsen. Het criterium hierbij is dat de optelling van vaste kosten en vervoerskosten minimaal moet zijn.

a Formuleer het wiskundig model voor dit LP-vraagstuk en los het op.

b Indien de prognose van de jaarlijkse vraag voor alle distributiecentra 50% hoger zou liggen, zouden er feitelijk niet één, maar drie nieuwe brouwerijen moeten worden geopend. Welke zijn deze drie plaatsen?

c Schuim wil beslist niet meer dan twee nieuwe brouwerijen openen. In het scenario van de verhoogde prognoses uit onderdeel b, welke brouwerijen worden dan geopend en hoe zijn de vervoersstromen? (Hint: voer de extra restrictie toe dat de som van de binaire beslissingsvariabelen kleiner dan of gelijk aan 2 moet zijn.)

Opgave 30

Een stad is verdeeld in zeven wijken 1 tot en met 7. De gemeente overweegt een herverdeling van openbare basisscholen over de stad om beter alle wijken te kunnen bedienen. Zeven potentiële locaties A tot en met G voor een basisschool worden overwogen. In tabel 1.84 is weergegeven vanuit welke locatie een basisschool welke wijken kan bedienen.

We willen onderzoeken hoe met zo weinig mogelijk schoollocaties de hele stad te bedienen is. Definieer hiertoe zeven binaire beslissingsvariabelen yA tot en met yG. Een variabele is 0 indien op betreffende locatie geen school wordt gevestigd en een variabele is 1 indien op die locatie wel een school wordt gevestigd. Doel is dus het minimaliseren van yA + yB + … + yG. De restrictie dat bijvoorbeeld wijk 1 wordt bediend, is te formuleren als: yA + yB + yC + yG ≥ 1.

Tabel 1.84

Locatie politiebureau	Wijken die kunnen worden bediend
A	1, 5, 7
B	1, 2, 5, 7
C	1, 3, 5
D	2, 4, 5
E	3, 4, 6
F	4, 5, 6
G	1, 5, 6, 7

a Los dit LP-vraagstuk op.
b Voor de wijken 5 en 6 is het wenselijk dat deze door twee basisscholen kunnen worden bediend. Welke verdeling van scholen over de stad is nu optimaal wanneer het totale aantal weer minimaal wordt gekozen?
c Als gevolg van de groei van de bevolking zal de stad over enkele jaren twee nieuwe wijken, 8 en 9, rijker zijn. Wijk 8 zal kunnen worden bediend door een school in locaties C of D, wijk 9 zal kunnen worden bediend door locaties A of F. Hoe moeten de basisscholen over de stad worden verdeeld als al rekening wordt gehouden met de bediening van de wijken 8 en 9?

Opgave 31
Zes computers zijn in een netwerk met elkaar verbonden. Per verbinding is er een maximale capaciteit aan data die kunnen worden verzonden. Het netwerk bestaat uit de verbindingen die in tabel 1.85 met bijhorende capaciteit staan aangegeven.

Tabel 1.85

Verbinding	Capaciteit	Verbinding	Capaciteit	Verbinding	Capaciteit
1-2	12,0 Mb/s	2-5	12,0 Mb/s	3-6	12,0 Mb/s
1-3	5,0 Mb/s	3-4	15,0 Mb/s	4-5	8,0 Mb/s
1-4	10,0 Mb/s	3-5	8,0 Mb/s	5-6	16,0 Mb/s

a Hoeveel data kunnen maximaal van computer 1 naar computer 6 worden gestuurd?
b Bepaal met het gevoeligheidsrapport van Excel welke verbindingen een ‘bottleneck’ zijn.
c Indien de verbinding tussen de computers 2 en 5 wegvalt, wat is dan de maximale capaciteit van de verbinding tussen computers 1 en 6?
d Verklaar waarom het weinig zinvol is om de capaciteit van alle in onderdeel b gevonden verbindingen met 5 Mb/s te verhogen.

Opgave 32
Op een haventerrein staan acht vaste kranen die containers tussen twee punten kunnen verplaatsen. In tabel 1.86 is weergegeven welke punten de kranen verbinden en wat de capaciteit van iedere kraan is.

Voor een bepaalde klant moeten 50 containers van punt A naar punt F worden overgeslagen. Hiervoor moeten meerdere kranen worden ingezet. Een container kan bijvoorbeeld met kraan 1 van A naar B worden gebracht, vervolgens met kraan 5 van B naar E worden verplaatst, om tot slot met kraan 8 van E naar F te gaan. Maar alle alternatieve routes zijn ook beschikbaar.

Tabel 1.86

Kraan	**Verbindt punten**	**Capaciteit** (containers per uur)
1	A en B	14
2	A en C	5
3	B en C	8
4	B en D	17
5	B en E	7
6	C en D	6
7	D en F	12
8	E en F	5

a Teken een schema met daarin de punten A tot en met F, de plaatsing van de acht kranen en de capaciteit van iedere kraan.

b Wat is de kortste tijd waarin de 50 containers van A naar F kunnen worden verplaatst? (Bereken hiertoe eerst de maximale capaciteit van het netwerk van kranen.)

c Er zijn verschillende taakverdelingen onder de kranen mogelijk die allemaal dezelfde maximale capaciteit van het kranennetwerk opleveren. Tussen welke grenzen kan de inzet van kraan 3 variëren zodanig dat de capaciteit van het netwerk optimaal blijft?

d Indien kraan 4 als gevolg van onderhoudswerkzaamheden niet beschikbaar is, hoe lang zal de overslag van A naar F dan minimaal duren?