Th.M. van Pelt
R.B.J. Pijlgroms
J.L. Walter

Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Deel 0

Uitwerkingen

Noordhoff Uitgevers

Vierde druk

Wiskunde voor het hoger onderwijs 0
Uitwerkingen

Wiskunde voor het hoger onderwijs 0 Uitwerkingen

Th.M. van Pelt

R.B.J. Pijlgroms

J.L. Walter

Vierde druk

Noordhoff Uitgevers Groningen | Houten

Ontwerp omslag: G2K designers Groningen / Amsterdam
Omslagillustratie: PhotoDisc

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

5 6 7 8 9 / 14 13 12 11 10

ISBN (ebook) 978 90 01 84825 5
ISBN 978 90 01 03339 2
NUR 120

Woord vooraf

In deze vierde druk van *Uitwerkingen* bij het leerboek *Wiskunde voor het hoger onderwijs, deel 0* zijn – zoals gewoonlijk – praktisch alle uitwerkingen van de opdrachten en vraagstukken opgenomen. Waar geen uitwerking is opgenomen is dit vermeld (geen uitwerking) of is slechts het antwoord gegeven (veelal in de toetsen na leereenheden en in de eindtoets van een hoofdstuk).

De auteurs houden zich aanbevolen voor het ontvangen van op- en aanmerkingen en suggesties van gebruikers ter verbetering van de inhoud. We hopen dat ook deze druk zijn weg zal vinden in het wiskundeonderwijs.

De auteurs,
voorjaar 2005

Aan de student – Waarom dit boek?

Een goed begin is het
halve werk; volhouden is
de andere helft.

De schrijvers verwachten met dit boek de aansluiting op de wiskunde van jouw vooropleiding en jouw persoonlijke leerstijl goed te laten verlopen.

Als je aan de toelatingsvoorwaarde van jouw hbo-studie voldoet, bezit je ook een voldoende hoeveelheid kennis, inzicht en vaardigheden voor het vak wiskunde. Het blijkt echter dat de mate van de geoefendheid in wiskunde soms onvoldoende is en dat enkele wiskundige onderwerpen, die in het hbo van belang zijn, zijn weggezakt bij de aanvang van je hbo-studie. Die moeten dus worden opgefrist. Iedere opleiding zal daarbij een passende keuze uit de leereenheden van dit boek kunnen maken.

Het is ook mogelijk dat je nog niet aan de toelatingsvoorwaarden voldoet door de keuze van een havo- of vwo-profiel dat geen toelatingsrecht geeft of omdat je, als mbo-er, niet in het bezit bent van de hbo-doorstroomdeelkwalificatie. In beginsel vind je in dit boek alles wat nodig is om je voor een hbo-studie te kwalificeren. Dit geldt ook voor de groep studenten die al lange tijd uit het onderwijs is en een vervolgstudie aanpakt.

Ten slotte kan het zijn dat je een student bent die zich, in de tweede fase van het Voortgezet Onderwijs of in het mbo, oriënteert op een hbo-studie. Wij vinden dat dit boek zich goed leent om als oriëntatie op vervolgstudies te gebruiken, omdat het boek je een goed beeld geeft van wat je in verschillende hbo-opleidingen nodig hebt.

Vanwege het feit dat dit boek voor verschillende doelgroepen is geschreven en mensen verschillende leerstijlen hebben, is gekozen voor een opzet waarbij een leereenheid op diverse manieren gebruikt kan worden. In de studiewijzer vind je daarvoor de nodige aanwijzingen, zodat je een maximaal rendement uit dit boek kunt halen.

Om de genoemde doelgroepen goed op de hbo-studie voor te bereiden, zijn er in hoofdstuk 3 twee leereenheden toegevoegd waarvan de inhoud niet in deze vorm op het havo en het mbo aan de orde komt. Het gaat om de onderwerpen Limieten en Integraalrekening, die in alle hbo-opleidingen met wiskundeonderwijs van belang zijn. Deze twee onderwerpen laten ook zien waarom de eerste twee hoofdstukken van dit boek zo belangrijk zijn voor je verdere studie.

Het boek kan zeker ook dienen als naslagwerk. De meesten van jullie hebben de wiskundeboeken uit de vooropleiding van de hand gedaan. Geen nood: alle benodigde voorkennis staat in dit boek.

Om je een beeld te geven van de ‘ontdekkers’ en/of de eerste gebruikers van de wiskunde uit dit boek, geven wij achtergrondinformatie over de belangrijkste hoofdrolspelers uit de wiskunde. Je zult zien dat veel wiskunde bedacht is door ‘gewone’ mannen en vrouwen die erop uit waren om onplezierig rekenwerk te vermijden, om nauwkeuriger te kunnen werken en wetmatigheden te kunnen verklaren. Ook dát zijn motieven geweest om dit boek voor jullie te schrijven.

Voorjaar 2005
De auteurs

Studiewijzer

Beste student(e),

Een boekje vol met uitwerkingen! Dat lijkt erg handig, maar je moet er wel verstandig mee omgaan. Wij denken dat dit het beste als volgt kan.
Lees eerst de studiewijzer in het theorieboek goed door, zodat je weet hoe je met de opdrachten moet omgaan.
Ga ervan uit dat je het meeste leert door *zelf* de opdrachten en vraagstukken uit het boek te maken. Van de fouten die je daarbij maakt leer je veel over de stof en over jezelf. Maak die fouten dan ook eerst en bekijk *daarna* pas de uitwerkingen.
De uitwerkingen in dit boek zijn slechts een onderdeel van de aanpak van de oplossing van een vraagstuk.
Bij het oplossen van wat ingewikkelder vraagstukken moet meer gebeuren dan in het uitwerkingenboek staat. Je zult altijd eerst moeten nagaan wat er precies *gevraagd* wordt en wat de *gegevens* in het vraagstuk zijn. Het gevraagde zul je daarna vaak in verband moeten brengen met de gegevens, door gebruik te maken van de in het hoofdstuk behandelde begrippen en definities.
De uitwerkingen in dit boek zijn slechts het zichtbare deel van de oplossingsroute: de weg van de gegevens naar het gevraagde. Het noodzakelijke denkwerk vooraf (van het gevraagde naar de gegevens) staat er niet altijd bij, maar moet wel eerst uitgevoerd worden.

Na afloop van je berekening of oplossing moet je ook altijd bekijken of de antwoorden 'ergens op lijken': of de uitkomst in de orde van grootte is die je verwachtte, of het antwoord nog vereenvoudigd kan worden, of het antwoord klopt met dingen die je al wist, enzovoort. Ook dat staat niet altijd in de uitwerking.
Als je geen begin kunt maken met de oplossing, omdat de weg van het gevraagde naar de gegevens nog niet duidelijk is, kijk dan even kort naar de uitwerking, waardoor je vaak al snel een idee krijgt hoe het vraagstuk wordt aangepakt (hoe de oplossingsroute begint). Probeer het daarna weer zelf. Als je op deze manier, met vallen en opstaan, een vraagstuk hebt opgelost, gooi dan jouw uitwerking weg en probeer het nog eens helemaal zelf. Als dat lukt, heb je echt iets geleerd!
Een voordeel van deze aanpak is ook dat, als je iets uit de uitwerking niet begrijpt, je je leraar, lerares of medestudent(e) precies kunt 'aanwijzen' wat je niet snapt. Je kunt daarna waarschijnlijk weer snel zelf verder.

De voorbeelden uit het boek laten je zien hoe de aanpak van een vraagstuk, de oplossingsroute en de uitwerkingen eruit zien. Bekijk die voorbeelden dus goed en ga bij elke stap na of je begrijpt waarom juist die stap gezet wordt.

De uitwerkingen in het uitwerkingenboek moet je juist *niet* vooraf gaan lezen om te zien hoe een vraagstuk kan worden opgelost. Eerst zelf doen, dan lezen geeft het hoogste leerrendement.

In schemavorm staan de aanwijzingen voor het oplossen van vraagstukken overzichtelijk bij elkaar.
Pak dit schema er overigens alleen bij als je een vraagstuk of berekening niet aankunt. Als je door hebt hoe een vraagstuk moet worden aangepakt, ga dan gewoon je eigen weg.

Analyse (zelf doen)	**Oplossingsroute (zelf doen)**	**Uitwerking (uitwerkingenboek, ter controle)**	**Terugblik (zelf doen)**
Bekijk vooral goed wat er *gevraagd* wordt. Onderzoek daarna grondig wat er gegeven is, en welke formules en definities je kunt gebruiken. Ga ook na of je al eerder zoiets hebt berekend en opgelost of dat in de voorbeelden iets dergelijks is behandeld. Bedenk ook wat ongeveer het resultaat moet zijn (ordegrootte van een uitkomst, een schatting van de oplossingsverzameling, de soort formule die eruit moet komen enzovoort).	Ga nu na hoe je vanuit het gevraagde terug kan redeneren naar de gegevens. Ga na welke behandelde begrippen en formules een verband leggen tussen het gevraagde en de gegevens. Ga na waar dit vraagstuk afwijkt van de voorbeelden in het boek: wat is er anders, waar moet ik speciaal op letten. Zie je het verband tussen het gevraagde en de gegevens echt niet zitten, kijk dan even kort in dit uitwerkingenboek.	Als het verband tussen het gevraagde en de gegevens (bijna) duidelijk is, kun je een uitwerking proberen op te schrijven. Loop je toch vast, omdat een schakeltje ontbreekt of omdat je rekenfouten hebt gemaakt, kijk dan nog even in het uitwerkingenboek en ga daarna weer zelfstandig door met de oplossing.	Bekijk jouw oplossing kritisch. Klopt het met de verwachtingen uit de analyse, klopt het met de uitwerking in het uitwerkingenboek? Ga ook nog even na waar en waarom je bent vastgelopen, en maak het vraagstuk nog een keer helemaal zelf. Probeer nog een vraagstuk van dit type en noteer dat je er voor het tentamen nog een van dit type zult maken.

Veel succes met je (wiskunde)studie!

Inhoud

Basisvaardigheden

Wiskunde is als een fundament voor een gebouw: het komt het eerst, het is onmisbaar en het valt alleen op als het niet sterk genoeg is.

1

Leereenheid 1.1

Ontbinden en vergelijken

Diagnostische toets

1 a $(6 - \sqrt{3}) \cdot (6 + \sqrt{3}) = \{\text{regel } 6\}\ 6^2 - (\sqrt{3})^2 = 36 - 3 = 33$

b $\sqrt{5}(2 + \sqrt{10} - 3\sqrt{2}) = \{\text{regel } 3\}\ 2\sqrt{5} + \sqrt{50} - 3\sqrt{10}$

$= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{10}$

$= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{10}$

c $(4\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 = \{\text{regel } 8\}\ (4\sqrt{x})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

$= 16x - 8\sqrt{3}x + 3$

d $-2(pq - 3)^2 = \{\text{regel } 8\} - 2((pq)^2 + 2 \cdot -3 \cdot pq + (-3)^2)$

$= -2(p^2q^2 - 6pq + 9)$

$= \{\text{regel } 3\} - 2p^2q^2 + 12pq - 18$

e $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = \{\text{regel } 6\}\ (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

$= \{\text{regel } 6\}\ x^4 - 16$

f $(t^2 + 3)(2t^2 - 4) = \{\text{regel } 4\}\ 2t^4 + 6t^2 - 4t^2 - 12 = 2t^4 + 2t^2 - 12$

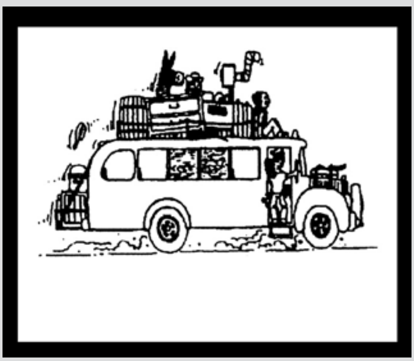
2 a $s^2 - 4s - 21 = \{\text{regel } 11\}\ (s + 3)(s - 7)$

b $t^5 - 9t^4 + 20t^3 = \{\text{regel } 9\}\ t^3(t^2 - 9t + 20)$
$= \{\text{regel } 11\}\ t^3(t - 4)(t - 5)$

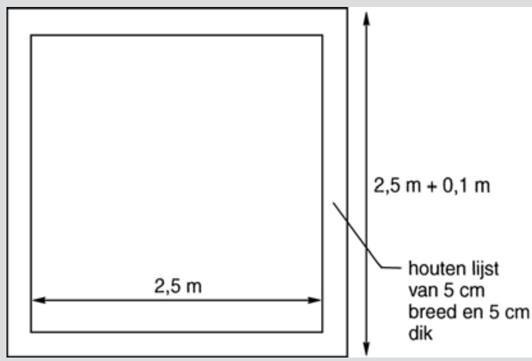
c $p^4 - 25q^2 = \{\text{regel } 12\}\ (p^2)^2 - (5q)^2 = (p^2 + 5q)(p^2 - 5q)$

d $-2ac - bc + 2ad + bd = \{\text{regel } 9\} - c(2a + b) + d(2a + b)$
$= \{\text{regel } 9\}\ (2a + b)(-c + d)$
{of in één keer regel 10}

Figuur 1.1a **Het schilderij**



Figuur 1.1b **Het schilderij geschematiseerd**



3 a Het kunstwerk heeft een lengte van 2,5 meter, zie fig. 1.1a en b. De buitenkant van de lijst heeft een afmeting van 2,6 meter. De hoeveelheid hout die hiervoor nodig is, berekend met merkwaardige producten, bedraagt:
$2{,}6 \cdot 2{,}6 \cdot 0{,}05\ \text{m}^3 - 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}05\ \text{m}^3$
$= ((2{,}6)^2 - (2{,}5)^2) \cdot 0{,}05\ \text{m}^3 = (2{,}6 + 2{,}5)(2{,}6 - 2{,}5) \cdot 0{,}05\ \text{m}^3$
$= 5{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}0255\ \text{m}^3$

b Er komt een groef in van 3 cm diep en 3 cm breed. Dat wil zeggen dat er van de oorspronkelijke lijst af gaat:
$((2{,}56)^2 - (2{,}5)^2) \cdot 0{,}03\ \text{m}^3$ hout. Uitwerking van dit merkwaardige product levert:
$(2{,}56 + 2{,}5) \cdot (2{,}56 - 2{,}5) \cdot 0{,}03\ \text{m}^3 =$
$5{,}06 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}03\ \text{m}^3 = 0{,}009108\ \text{m}^3$

4 a $p^2 - 4p - 21 = 0$ {ontbinden volgens regel 11}
$\Leftrightarrow (p + 3)(p - 7) = 0$ {beide factoren op 0 stellen} $\Leftrightarrow p + 3 = 0$ of $p - 7 = 0$
{beide vergelijkingen oplossen} $\Leftrightarrow p = -3$ of $p = 7$

b $10t^2 + t - 3 = 0$ {een bijzonder geval van regel 11}
We proberen $(2t + a)(5t + b) = 10t^2 + (2b + 5a)t + ab$;
$a = -1$ en $b = 3 \Leftrightarrow (2t - 1)(5t + 3) = 0$
{beide factoren op 0 stellen} $\Leftrightarrow 2t - 1 = 0$ of $5t + 3 = 0$
{beide vergelijkingen oplossen} $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ of $t = -\frac{3}{5}$

c $4a^2 - 20a + 25 = 0$ {herschrijven}
$\Leftrightarrow (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = 0$ {regel 14}
$\Leftrightarrow (2a - 5)^2 = 0$
{factor op 0 stellen} $\Leftrightarrow 2a - 5 = 0$
{vergelijking oplossen} $\Leftrightarrow a = 2\frac{1}{2}$

d $3x^4 + 36x^3 + 105x^2 = 0$
{volgens regel 9 ontbinden} $\Leftrightarrow 3x^2(x^2 + 12x + 35)$
{volgens regel 11 ontbinden} $\Leftrightarrow 3x^2(x + 5)(x + 7) = 0$
{factoren op 0 stellen} $\Leftrightarrow 3x^2 = 0$ of $x + 5 = 0$ of $x + 7 = 0$
{vergelijkingen oplossen} $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -5$ of $x = -7$

e $5b - 10b + 12 = 0$ {niet volgens regel 9 t/m 17 te ontbinden; abc-formule, eerst D uitrekenen}
$D = b^2 - 4ac = 100 - 240 < 0 \Rightarrow$ Er is geen reële oplossing!!

f $5t^2 = 35t$ {op 0 herleiden} $\Leftrightarrow 5t^2 - 35t = 0 \Leftrightarrow 5t(t - 7) = 0$
$\Leftrightarrow 5t = 0$ of $t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = 7$
Alternatieve oplossing: $5t^2 = 35t \Rightarrow t = 7$ en $t \neq 0$ (nader onderzoeken $t = 0$); $t = 0$ blijkt een oplossing te zijn. Dus oplossingen $t = 0$ of $t = 7$

g $c^2 - 4\frac{1}{2}c = 2\frac{1}{2}$ {op 0 herleiden} $\Leftrightarrow c^2 - 4\frac{1}{2}c - 2\frac{1}{2} = 0$
{$D = 20{,}25 + 10 = 30{,}25$} $c = 5$ of $c = -\frac{1}{2}$

5 $x^2 + 6kx + 9k^2 = 0$ heeft precies één oplossing: $D = 36k^2 - 36k^2 = 0$.
De vergelijking heeft dus altijd precies één oplossing.

6 Twee getallen zijn onbekend; stel ze dus op x en y. Dan geldt $x - y = 16$ en $xy = 1\,025$. Om x en y te berekenen gaan we het volgende stelsel vergelijkingen oplossen:

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ xy = 1\,025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 16 \\ (y + 16)y = 1\,025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 16 \\ y^2 + 16y - 1\,025 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 + 16 = 41 \text{ of } x = -41 + 16 = -25 \\ y = 25 \text{ of } y = -41 \end{cases}$$

7 Stel de leeftijd van de moeder x en die van de zoon y jaar. De beschreven situatie levert het volgende stelsel vergelijkingen op: $\begin{cases} x + y = 71 \\ x - 1 = 2(y - 1) \end{cases}$
Oplossing van stelsel is $x = 47$ en $y = 24$.

8 Stel de bedragen die resp. tegen 3%, 4,5% en 5% uitstaan gelijk aan resp. x, y en z.
Uit de beschrijving is het volgende stelsel van vergelijkingen op te stellen:

$$\begin{cases} 0{,}03x + 0{,}045y + 0{,}05z = 428 \\ x + y + z = 9\,540 \\ z = 0{,}8 \cdot (x + y) \end{cases}$$

De oplossing in euro's van dit stelsel is $x = 1\,500$, $y = 3\,800$ en $z = 4\,240$.

9 a $\begin{cases} 15x - 7y = 159 \\ x = 2y + 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15(2y + 29) - 7y = 159 \\ x = 2y + 29 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 23y = -276 \\ x = 2y + 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -12 \\ x = 5 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 21 \\ -x + 2y - 3z = -16 \\ 3x - 7y - 4z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - 4z = -11 \\ -x + 2y - 3z = -16 \\ -y - 13z = -38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 5 \\ z = 3 \end{cases}$

10 Heeft het stelsel vergelijkingen een oplossing of is het strijdig dan wel identiek?

$\begin{cases} 2\frac{1}{2}x - 3y = 4 \\ -12y + 10x = 6 \end{cases}$; vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met 4, dan

krijgen we: $10x - 12y = 16$. Deze vergelijking is strijdig met de tweede vergelijking. Antwoord **b** is dus goed.

11 $8x^2 - 6x - 9 = 0$; $D = 36 + 288 > 0$. Dus de vkv heeft twee verschillende reële oplossingen. Antwoord **a** is juist.

1.1.1 Merkwaardige producten

Opdrachten

1 a $(a + p)(a + q) = a^2 + ap + aq + pq$

b $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

c $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

d $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2 Geen uitwerking.

3 a $2p^2(3p^3 + 4) = \{\text{regel 3}\}\ 6p^5 + 8p^2$

b $(2t - 3)(2t - 5) = \{\text{regel 5}\}\ 4t^2 + (-3 + (-5))2t + 15$
$= 4t^2 - 16t + 15$

c $(3q^2 + 2p)(3q^2 - 2p) = \{\text{regel 6}\}\ 9q^4 - 4p^2$

d $(s^2 + 5t)^2 = \{\text{regel 7}\}\ s^4 + 10s^2t + 25t^2$

e $(p + 5q)(-5q + 2p) =$
$\{\text{na herschrijven regel 6}\}\ (2p + 5q)(2p - 5q) = 4p^2 - 25q^2$

4 a $3(p + 6) = 3p + 18$

b $4(3a - 2) = 12a - 8$

c $b(b - 4) = b^2 - 4b$

d $6(4 + 7x) = 24 + 42x$

e $16(-2h - 4) = -32h - 64$

f $3e(4 - e) = 12e - 3e^2$

g $-(x - 5) = -x + 5$

h $-5(3c + 4) = -15c - 20$

i $-s(-s - 5) = s^2 + 5s$

j $-(8 - 4m) = -8 + 4m$

Mocht je problemen hebben met 'het zonder haakjes schrijven' dan kan de volgende methode uitkomst bieden:
$3(p + 6)$ kan als volgt berekend worden

	p	$+6$
×		3
=	$3p$	$+18$
uitkomst	$3p + 18$	

5 a $5(p^4 + 8p^2) = 5p^4 + 40p^2$

b $7a^2(5a^3 - 4) = 35a^5 - 28a^2$

c $p^3(p^2 - 8p) = p^5 - 8p^4$

d $9x(2 + 8x^2) = 18x + 72x^3$

e $15h^4(-4h^2 - 9) = -60h^6 - 135h^4$

f $7e^2(5e - 3e^5) = 35e^3 - 21e^7$

g $-x(x^3 - 7x) = -x^4 + 7x^2$

h $-8c^2(5c^4 + 3c^2) = -40c^6 - 24c^4$

i $w - w^3(-w - 9w^2) = w + w^4 + 9w^5$

j $-n^4(7 - 3n^5) = -7n^4 + 3n^9$

6 a $(n - 7)(n + 3) = n^2 - 4n - 21$

b $(p + 2)(p - 9) = p^2 - 7n - 18$

c $(x - \frac{1}{2})(x + 5) = x^2 + 4\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

d $(7 - s)(s + 5) = -s^2 + 2s + 35$

e $(g - 7)(g + 7) = g^2 - 49$

f $(v - 7)(3 + v) = v^2 - 4v - 21$

g $(b + 8)(b + 11) = b^2 + 19b + 88$

h $(3 + 4a)(a + 2) = 4a^2 + 11a + 6$

i $(x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81$

j $(t - 4)^2 = t^2 - 8t + 16$

k $(7 - g)^2 = 49 - 14t + g^2$

l $(-p - 7)^2 = p^2 + 14p + 49$

m $(a + 11)^2 = a^2 + 22a + 121$

o $(-3 - 4h)^2 = 9 + 24h + 16h^2$

Mocht je in deze situatie problemen hebben met 'het zonder haakjes schrijven' dan kan de volgende methode uitkomst bieden:
$(n - 7)(n + 3)$ kan als volgt berekend worden:

	n	-7	
×	n	$+3$	
	n^2	$-7n$	
		$+3n$	-21
=	n^2	$-4n$	-21
uitkomst	$n^2 - 4n - 21$		

Vraagstukken

1.1 a $(3 + \sqrt{5})(\sqrt{7} - 2) = \{\text{regel 4}\}\ 3\sqrt{7} - 6 + \sqrt{35} - 2\sqrt{5}$

b $(2p + 1)^2 = \{\text{regel 7}\}\ 4p^2 + 4p + 1$

c $(a^4 + 1)(a^4 - 1) = \{\text{regel 6}\}\ a^8 - 1$

d $(-3a^2 - \frac{1}{3})^2 = \{\text{regel 8}\}\ 9a^4 + 2a^2 + \frac{1}{9}$

e $(3x + y)(3x - y) = \{\text{regel 6}\}\ 9x^2 - y^2$

f $-(x - 2)(2 - x) =$

$\{\text{na herschrijving regel 8}\}\ (x - 2) \cdot (x - 2) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

g $-(a^4 - 2)^2 = \{\text{regel 8 en regel 3}\} - (a^8 - 4a^4 + 4) = -a^8 + 4a^4 - 4$

h $(p - 2q)(p + 2q)(p^2 - 4q^2) = \{\text{regel 6}\}\ (p^2 - 4q^2)(p^2 - 4q^2)$
$= \{\text{regel 8}\}\ p^4 - 8p^2q^2 + 16q^4$

i $(a + 7)(a + 8) = \{\text{regel 5}\}\ a^2 + (7 + 8)a + 56 = a^2 + 15a + 56$

j $(7 + 2\sqrt{6})^2 = \{\text{regel 7}\}\ 49 + 28\sqrt{6} + 24 = 73 + 28\sqrt{6}$

1.2 a $(x + 2)(x - 2) = \{\text{regel 6}\}\ x^2 - 4$

b $-(x^2 - \frac{1}{2}x)^2 = \{\text{regel 8 en regel 3}\} - (x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2) = -x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2$

c $-(b^2 - ab)(b^2 + ab) = \{\text{regel 6 en regel 3}\} - (b^4 - a^2b^2) = -b^4 + a^2b^2$

d $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = \{\text{regel 8}\}\ \frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}$

e $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{y}\right)^2 = \{\text{regel 7}\}\ \frac{1}{4} + \frac{2x}{2y} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{4} + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$

f $-b(x + y + z) = \{\text{regel 3}\} - bx - by - bz$

g $(a - b)(x + y + z) =$
$\{\text{bijzonder geval van regel 4}\}\ ax + ay + az - bx - by - bz$

1.3 De kosten van en aluminium cilinder bedragen $\pi d \cdot (h + \frac{1}{2}d) \cdot 0{,}85 =$ $\pi \cdot 25 \cdot (75 + \frac{1}{2} \cdot 25) \cdot 85 = 1875\pi + 312{,}5\pi = 2187{,}5\pi \approx 6872{,}23$. Dus één aluminium cilinder kost €6.872,23.

1.4 a De leeftijd van het oudste kind is x en de leeftijd van het jongste kind is y. Hiertussen bestaan de volgende relaties $x = 3 \cdot y$ en $x - y = 4$. Uit die laatste relatie volgt $y = x - 4$. Dus de eerste relatie kan herschreven worden in $x = 3 \cdot (x - 4)$.

b De haakjes wegwerken levert $x = 3 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow x = 3x - 12$.

c Het resultaat van **b** uitgewerkt: $x = 3x - 12 \Leftrightarrow x = 12$ en dus $x = 6$. Het oudste kind is 6 jaar en het jongste 2 jaar. Controle $6 = 3 \cdot 2$ en $6 - 2 = 4$.

1.1.2 Ontbinden in factoren

Vraagstukken

1.5 a $12^2 - 8^2 = (12 + 8) \cdot (12 - 8) = 20 \cdot 4 = 80$

b $17^2 - 3^2 = (17 + 3) \cdot (17 - 3) = 20 \cdot 14 = 280$

c $25^2 - 15^2 = (25 + 15) \cdot (25 - 15) = 40 \cdot 10 = 400$

d $38^2 - 28^2 = (38 + 28) \cdot (38 - 28) = 66 \cdot 10 = 660$

e $24^2 - 2 \cdot 24 \cdot 4 + 4^2 = (24 - 4)^2 = 20^2 = 400$

f $12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 8 + 8^2 = (12 + 8)^2 = 20^2 = 400$

1.6 a ggf(10, 12) = 2; $10 = 2 \cdot 5$ en $12 = 2^2 \cdot 3$

b ggf(20, 28) = 4; $20 = 2^2 5, 28 = 2^2 \cdot 7$

c ggf(36, 126) = 18; $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

d ggf(60, 108) = 12

e ggf$(a^3b^2c, a^2bc^3d) = a^2bc$

f ggf$(xy^2z, x^3yz^2) = xyz$

1.7 a $a^2 - x^2 = \{\text{regel } 12\}\ (a + x)(a - x)$

b $a^2 - 4x^2 = \{\text{regel } 12\}\ (a + 2x)(a - 2x)$

c
$$\begin{aligned} b^2(x + 3) + b(x + 3) &= \{\text{regel } 9\}\ (x + 3)(b^2 + b) \\ &= b(b + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

d
$$\begin{aligned} x^2(a + 3) - 4(a + 3) &= \{\text{regel } 9\}\ (a + 3)(x^2 - 4) \\ &= \{\text{regel } 12\}\ (a + 3)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

1.8 a
$$\begin{aligned} ab + ac + bp + cp &= \{\text{regel } 10\}\ a(b + c) + p(b + c) \\ &= (b + c)(a + p) \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} a^3 - 2a^2 + 4a - 8 &= \{\text{regel } 10\}\ a^2(a - 2) + 4(a - 2) \\ &= (a - 2)(a^2 + 4) \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} a^3 - 2a^2 - 4a + 8 &= \{\text{regel } 10\}\ a^2(a - 2) - 4(a - 2) \\ &= (a - 2)(a^2 - 4) \\ &= \{\text{regel } 12\}\ (a - 2)(a + 2)(a - 2) \\ &= (a + 2)(a - 2)^2 \end{aligned}$$

Opdrachten

7 a $a^2 + 8a = a(a + 8)$

b $15t^2 - 75t = 15t(t - 5)$

c $12b + 48b^2 = 12b(1 + 4b)$

d $h^2 - 13h = h(h - 13)$

e $9p^2 - 72p = 9p(p - 8)$

f $28x^2 + 35x = 7x(4x + 5)$

g $-8q + 32 = -8(q - 4)$

h $-6x^2 + 24x = -6x(x - 4)$

i $-8s - 6 = -2(4s + 3)$

j $-10e + 60e^2 = -10e(1 - 6e)$

k $-6d - 7 = -(6d + 7)$

l $-8w - 3 = -(8w + 3)$

8 a $a^2 - 12a = a(a - 12)$

b $18t^2 - 60t = 6t(3t - 5)$

c $11b + 66b^2 = 11b(1 + 6b)$

d $h^2 + 14h = h(h + 14)$

e $8p^2 + 72p = 8p(p + 9)$

f $32x^2 + 48x = 16x(2x + 3)$

g $-8q + 56 = -8(q - 7)$

h $-5x^2 + 45x = -5x(x - 9)$

i $-12s - 9 = -3(4s + 3)$

j $-4e + 52e^2 = -4e(1 - 13e)$

k $-11d - 8 = -(11d + 8)$

l $-2w - 9 = -(2w + 9)$

9 a $x^4 - 4a^2 =$ {na herschrijven regel 12} $(x^2)^2 - (2a)^2$
$= (x^2 + 2a)(x^2 - 2a)$

b $14t^3 + 49 + t^6 =$ {na herschrijven regel 13} $(t^3)^2 + 14t^3 + (7)^2$
$= (t^3 + 7)^2$

c $s^4 - 10s^2 + 21 =$ {na herschrijven regel 11} $(s^2)^2 - 10s^2 + 21$
$= (s^2 - 3)(s^2 - 7)$

d $6c^2 + c - 12 =$ {probeer $(3c + a)(2c + b)$;$ab = -12$ en
$2a + 3b = 1$; $a = -4$ en $b = 3$} $(2c + 3)(3c - 4)$

Vraagstukken

1.9 a $a^8 - 6a^4b^2 + 9b^4 =$ {na herschrijven regel 14}
$(a^4)^2 - 6a^4b^2 + (3b^2)^2 = (a^4 - 3b^2)^2$

b $4a^8 + 16a^4 + 16 =$ {na herschrijven regel 15}
$(2a^4)^2 + 16a^4 + 4^2 = (2a^4 + 4)^2$

1.10 a $(2x + 1)^2 - (x + 2)^2 =$ {bijzonder geval van regel 12}
$(2x + 1 + x + 2)(2x + 1 - (x + 2)) = (3x + 3)(x - 1) =$ {regel 9}
$3(x + 1)(x - 1)$

b $3x^2 + 11x + 10 =$ {probeer $(3x + p)(x + q)$; $pq = 10$ en
$(3q + p) = 11$;$p = 5$ en $q = 2$} $(3x + 5)(x + 2)$

c $7x^2 - 9x + 2 =$ {probeer$(7x + p)(x + q)$; $pq = 2$ en
$(p + 7q) = -9$;$p = -2$ en $q = -1$} $(7x - 2)(x - 1)$

1.11 a $a^8 - b^8 =$ {na herschrijven regel 12} $(a^4)^2 - (b^4)^2$
$= (a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$
$=$ {regel 12} $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
$=$ {regel 12} $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

b $4a^2 + 2a - 12 = (2a)^2 + 2a - 12 =$ {regel 11} $(2a + 4)(2a - 3)$
$= 2(a + 2)(2a - 3)$
{probeer ook eens $(4a + p)(a + q)$; $pq = -12$ en $(p + 4q) = 2$
uitkomst $(a + 2)(4a - 6)$}

c $x^2 - 50x - 600 =$ {regel 11} $(x + 10)(x - 60)$

d $4a^6 - 6a^3 + 2\frac{1}{4} =$ {na herschrijven regel 14}
$(2a^3)^2 - 6a^3 + (1\frac{1}{2})^2 = (2a^3 - 1\frac{1}{2})^2$

e $5x^2 + 14x - 3$
Probeer $(5x + a)(x + b)$; $ab = -3$ en $(a + 5b) = 14$
$\Leftrightarrow a = -1$ en $b = 3 \Leftrightarrow (5x - 1)(x + 3)$

f $4a^2 + \dfrac{1}{4a^2} + 2 =$ {na herschrijven regel 13} $(2a)^2 + 2 + \left(\dfrac{1}{2a}\right)^2$
$= \left(2a + \dfrac{1}{2a}\right)^2$

1.1.3 Vierkantsvergelijkingen en de abc-formule

Vraagstuk

1.12 a $x^2 - 16 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 21$; $x = \sqrt{21}$ of $x = -\sqrt{21}$

b $a^2 - 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow (a - 5) \cdot (a + 3) = 0$; $a = 5$ of $a = -3$

c $p^2 + 3p - 36 = 4 \Leftrightarrow p^2 + 3p - 40 = 0$; $(p - 5) \cdot (p + 8) = 0$; $p = 5$ of $p = -8$

d $y^2 - 8y + 16 = 2y - 9 \Leftrightarrow y^2 - 10y + 25 = 0$; $(y - 5)^2 = 0$; $y = 5$

e $2b^2 - 12b = 8b - 42 \Leftrightarrow b^2 - 10b + 21 = 0$; $(b - 3) \cdot (b - 7) = 0$; $b = 3$ of $b = 7$

f $q^3 + 3q^2 - 51q = 8q^2 + 33q \Leftrightarrow q \cdot (q^2 - 5q - 84) = 0$; $q \cdot (q + 7) \cdot (q - 12) = 0$; $q = 0$ of $q = -7$ of $q = 12$

g $2x^2 - 2x - 12 = x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 20 = 0$; $(2x + 5) \cdot (x - 4) = 0$; $x = -2{,}5$ of $x = 4$

h $y^2 - 18y + 1 = -2y^2 + 5y + 9 \Leftrightarrow 3y^2 - 23y - 8 = 0$; $(3y + 1) \cdot (y - 8) = 0$; $y = -\frac{1}{3}$ of $y = 8$.

Opdrachten

10 a $x^2 + 6x = 0$; $x(x + 6) = 0$; $x = 0$ of $x = -6$

b $6g - 10g^2 = 0$; $2g(3 - 5g) = 0$; $g = 0$ of $g = \dfrac{3}{5}$

c $3n^2 + 27n = 0$; $3n(n + 9) = 0$; $n = 0$ of $n = -9$

d $-t^2 - 8t = 0$; $-t(t + 8) = 0$; $t = 0$ of $t = -8$

e $5x^2 - 20x = 0$; $5x(x - 4) = 0$; $x = 0$ of $x = 4$

f $4h^2 - 22h = 0$; $2h(2h - 11) = 0$;$h = 0$ of $h = 5\frac{1}{2}$

g $3r - 9r^2 = 0$; $3r(1 - 3r) = 0$; $r = 0$ of $r = \dfrac{1}{3}$

h $-5y^2 + 45y = 0$; $-5y(y - 9) = 0$; $y = 0$ of $y = 9$

11 a $x^2 + 9x = 0$; $x(x + 9) = 0$; $x = 0$ of $x = -9$

b $8g - 20g^2 = 0$; $4g(2 - 5g) = 0$; $g = 0$ of $g = \dfrac{2}{5}$

c $5n^2 + 35n = 0$; $5n(n + 7) = 0$; $n = 0$ of $n = -7$

d $-t^2 - 11t = 0$; $-t(t + 11) = 0$; $t = 0$ of $t = -11$

e $6x^2 - 36x = 0$; $6x(x - 6) = 0$; $x = 0$ of $x = 6$

f $6h^2 - 45h = 0$; $3h(2h - 15) = 0$; $h = 0$ of $h = 7\frac{1}{2}$

g $2r - 12r^2 = 0$; $2r(1 - 6r) = 0$; $r = 0$ of $r = \dfrac{1}{6}$

h $-7y^2 + 56y = 0$; $-7y(y - 8) = 0$; $y = 0$ of $y = 8$

12 $10t^2 + 13t - 3 = 0$
{probeer $(2t + p)(5t + q)$; $pq = -3$ en $5p + 2q = 13$; $p = 3$ en $q = -1$} $(2t + 3)(5t - 1) = 0$
{factoren op 0 stellen} $2r + 3 = 0$ of $5t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1\frac{1}{2}$ of $t = \frac{1}{5}$

{met abc-formule} $t_{1,2} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{20} = \dfrac{-13 \pm 17}{20}$

$\Leftrightarrow t_1 = \dfrac{4}{20} = \frac{1}{5}$ en $t_2 = \dfrac{-30}{20} = -1\frac{1}{2}$

13 $18x^4 + 12x^3 + 2x^2 = 0$
$2x^2(9x^2 + 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ {regel 13} $2x^2(3x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$
{factoren op 0 stellen} $x = 0$ of $x = -\frac{1}{3}$
$2x^2(9x^2 + 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ {met abc-formule} $x = 0$ en

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$

14 $3q^3 - 15q = 0$ {regel 5}
$3q(q^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow$ {factoren op 0 stellen} $q = 0$ of $q = \pm\sqrt{5}$

15 $t^2 + 4 = -6t \Leftrightarrow$
{op 0 herleiden} $t^2 + 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow$ {met abc-formule}

$t_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -3 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$t_1 = -3 + \sqrt{5}$ en $t_2 = -3 - \sqrt{5}$

16 $-2x^2 - 10 = -7x \Leftrightarrow$
{op 0 herleiden} $-2x^2 + 7x - 10 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen}
$D = 49 - 80 < 0 \Leftrightarrow$ De vergelijking heeft geen oplossing.

Vraagstukken

1.13 a $2t^2 + t = 6 \Leftrightarrow$
{op 0 herleiden} $2t^2 + t - 6 = 0$ {D bepalen}
$D = 1 + 48 = 49 > 0$; 49 is een kwadraat en de veelterm is dus te ontbinden; er zijn twee oplossingen: {abc-formule}

$t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \dfrac{-1 \pm 7}{4} \Leftrightarrow t_1 = 1\frac{1}{2}$ en $t_2 = -2$

b $x^2 = 3p^2$ {x is de variabele, p is een constante} $\Leftrightarrow$ {op 0 herleiden}
$x^2 - 3p^2 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} $D = 0 + 12p^2 > 0 \Leftrightarrow$

{abc-formule} $x_{1,2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{12p^2}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -p\sqrt{3}$ en $x_2 = p\sqrt{3}$

Alternatieve oplossing: {in één keer} $x = \pm\sqrt{3p^2} = \pm p\sqrt{3}$

c $3s^2 + s - 2 = 0 \Leftrightarrow$
{D bepalen} D = 1 + 24 = 25 en de veelterm is te ontbinden $\Leftrightarrow$
{probeer $(s + p)(3s + q)$} $\Leftrightarrow (s + 1)(3s - 2) = 0 \Leftrightarrow$
{factoren op 0 stellen} $s = -1$ of $s = \frac{2}{3}$; {of abc − formule}

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} \Leftrightarrow s_1 = \tfrac{2}{3} \text{ en } s_2 = -1$$

d $y^4 - 3y^3 - 10y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 3y - 10) = 0 \Leftrightarrow$
{D bepalen} D = 9 + 40 = 49 en de veelterm is te ontbinden $\Leftrightarrow$
{regel 3} $y^2(y - 5)(y + 2) = 0 \Leftrightarrow$
{factoren op 0 stellen} $y = 0$ of $y = 5$ of $y = -2$

e $(x - 1)^2 = x - 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - (x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 2$
Alternatief: $x^2 - 2x + 1 = x - 1$ etc.

f $(x + 2)^2 = 5x + 16 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 5x + 16 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow$
{D bepalen} D = 1 + 48 = 49 en de veelterm is te ontbinden $\Leftrightarrow$
$(x - 4)(x + 3) = 0$ {factoren op 0 stellen} $\Leftrightarrow x = 4$ of $x = -3$

1.14 Gegeven is de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Deze is te ontbinden in $(ax + p) \cdot (x + q) = 0$. Uitwerken en vergelijken levert: $aq + p = b$ en $pq = c$. Uit dit stelsel van twee vergelijkingen zijn p en q uit te drukken in a en b:

$$p = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \text{ en } q = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ of } p = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \text{ en } q = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uit $(ax + p) \cdot (x + q) = 0$ volgt $x_1 = -\dfrac{p}{a}$ of $x_2 = -q$.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{p}{a} - q$ en $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{p}{a} \cdot -q = \dfrac{pq}{a}$.

Druk nu $x_1 + x_2$ en $x_1 \cdot x_2$ uit in a en b:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + -\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$; in het andere geval krijgen we hetzelfde resultaat.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \cdot \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Alternatieve oplossing: de oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$ zijn volgens de wortelformule $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Dan $x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$.

Voor $x_1 \cdot x_2$ geldt $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

$$\frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

1.15 Als $x = 2$ een oplossing is, dan geldt $2(2)^2 - 3 \cdot 2 + p = 0$
$\Leftrightarrow 8 - 6 + p = 0 \Leftrightarrow p = -2$, de andere oplossing is $x = -\frac{1}{2}$

1.16 Stel de getallen x en y, dan geldt $x + y = 24$ en $x \cdot y = 128$.
Uit $x + y = 24$ volgt $x = 24 - y$, zodat de gelijkheid $x \cdot y = 128$ wordt:
$(24 - y)y = 128 \Leftrightarrow -y^2 + 24y - 128 = 0$ of $y^2 - 24y + 128 = 0$;
{D bepalen} D = 576 – 512 = 64 en de veelterm is te ontbinden $\Leftrightarrow$
$(x - 8)(x - 16) = 0 \Leftrightarrow$
{factoren op 0 stellen} $x - 8 = 0$ of $x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ of $x = 16$

1.17 a $3x^2 + 10x - 7 = 0$; $x_1 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{46}$ en $x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{46}$

b $6t^2 - 2t - \frac{1}{4} = 0$; $t_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\sqrt{10}$ en $t_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\sqrt{10}$

c $6s^2 - 4s - \frac{1}{4} = 0$; $s_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{22}$ en $s_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\sqrt{22}$

d $-2p^2 + 3p - 1 = 0$; $p_1 = 1$ en $p_2 = \frac{1}{2}$

e $1\frac{1}{3} + 4y + \frac{1}{2}y^2 = 0$; $y_1 = -4 + \frac{2}{3}\sqrt{30}$ en $y_2 = -4 - \frac{2}{3}\sqrt{30}$

f $2x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{16} = 0$; $x_1 = \frac{3}{4}$ en $x_2 = -\frac{1}{8}$

1.18 a De vkv is van de vorm $x^2 + bx + c = 0$. $x = -1$ is een oplossing, dus geldt:
$(-1)^2 - b + c = 0$ ofwel $1 - b + c = 0$. $x = 2$ is een oplossing, dus geldt:
$(2)^2 + 2b + c = 0$ ofwel $4 + 2b + c = 0$.
Uit $1 - b + c = 0$ volgt $c = b - 1$, zodat de gelijkheid $4 + 2b + c = 0$ wordt:
$4 + 2b + (b - 1) = 0$. Deze gelijkheid is te herleiden tot $3b + 3 = 0$, zodat
$b = -1$. Dan is $c = -2$.
De oplossing is van de vorm $(x + 1)(x - 2) = 0$. Dus $x^2 - x - 2 = 0$.

1.19 Als de vergelijking twee gelijke oplossingen heeft, geldt D = 0 ofwel
$m^2 - 16 = 0$. Dan is $m = 4$ of $m = -4$. Als $m = 4$, dan is de oplossing van de vergelijking $t = -1$. Als $m = -4$, dan is de oplossing $t = 1$.

1.20 De vkv heeft twee verschillende reële oplossingen als geldt
$(2k + 3)^2 - 12k > 0$.
De ongelijkheid kan herleid worden tot:
$4k^2 + 12k + 9 - 12k = 4k^2 + 9$. En dit getal is altijd groter dan 0!

1.21 We berekenen eerst hoe lang het duurt alvorens het voorwerp het hoogste punt bereikt. Een voorwerp dat omhoog geschoten wordt met beginsnelheid 10 m/s heeft na t seconden een snelheid van $v(t) = 10 - gt = 10 - 9{,}8t$.
Op het hoogste punt is de snelheid 0. De tijd die het voorwerp daarvoor nodig heeft vinden we uit de vergelijking

$10 - 9{,}8t = 0$ ofwel $t = \dfrac{10}{9{,}8}$ seconden.

Het voorwerp bereikt dan een hoogte van $h = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \left(\dfrac{10}{9{,}8}\right)^2 =$
5,1 meter.

Het voorwerp blijft $2 \cdot \dfrac{10}{9{,}8}$ seconden is ongeveer 2,0 seconden in de lucht.

1.1.4 Stelsel lineaire vergelijkingen

Vraagstukken

1.22 a $\begin{cases} -x - 2y = 5 \\ x + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 5 \\ -2y - 5 + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 5 \\ 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ -x + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (5y + 8) - 3y = 10 \\ x = 5y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = -6 \\ x = 5y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{6}{7} \\ x = \dfrac{26}{7} \end{cases}$

c $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19}{16} \\ y = \dfrac{17}{16} \end{cases}$

d $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

1.23 Noem de lengte van de rechthoek x en de breedte y, dan geldt $2x + 2y = 23{,}5$ en $x \cdot y = 31{,}875$. Dit levert het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 23{,}5 \\ x \cdot y = 31{,}875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11{,}75 - y \\ (11{,}75 - y) \cdot y = 31{,}875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{2} \text{ of } x = \dfrac{17}{4} \\ y = \dfrac{17}{4} \text{ of } y = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Opdrachten

17 a $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$; oplossing $x = 4$ en $y = 5$

b $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x \\ y = -x = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; oplossing $x = 0$ en $y = 0$

c $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5 = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$; oplossing $x = 2$ en $y = 3$

d $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$; oplossing $x = 0$ en $y = 1$

18 $\begin{cases} -3y + 2x = 12 \\ -x + 1\frac{1}{2}y = -6 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot\ 1 \\ \cdot -2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

Stelsel is afhankelijk. Oneindig veel oplossingen.

19 $\begin{cases} -3m + 2n = 18 \\ -4n = -6m - 40 \end{cases}$; stelsel is strijdig! Geen enkele oplossing.

20 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 19 \,|\cdot 1| \\ -x + y + z = 8 \,|\cdot 1||\cdot 2| \\ 2x - y + 2z = 9 \quad |\cdot 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 19 \\ 3y + 4z = 27 \\ y + 4z = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 19 \\ 75 - 8z = 27 \\ y = 25 - 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 6 \\ y = 1 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 6s = 15r + 29 \\ 3r + 2s = -1 \,|\cdot 3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6s = 15r + 29 \\ 9r + 6s = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 6s = 15r + 29 \\ 9r + 15r + 29 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1\frac{1}{2} \\ r = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

22 $\begin{cases} z = -3x + 2y + 4 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \\ 8x - 7y + 2z = 6 \end{cases}$; $x = 2{,}9$; $y = 2{,}6$; $z = 0{,}5$

Vraagstukken

1.24 $\begin{cases} 3p - 4q = 8 \\ 4p + 3q = \frac{1}{4} \end{cases}$; $p = 1$; $q = -\frac{5}{4}$

1.25 $\begin{cases} -2y + 3x = 2 \\ x = y + \frac{5}{6} \end{cases}$; met substitutiemethode: $x = \frac{1}{3}$; $y = -\frac{1}{2}$

1.26 $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \phantom{a+{}} b + 2c = 2 \\ a \phantom{{}+b} + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - c + 2 - 2c + c = 1 \\ b = 2 - 2c \\ a = 3 - c \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$

1.27 $\begin{cases} -a - b + c = 10 \\ a + 2b - 2c = 1 \\ 2a + 5b - 5c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + c = 10 \\ b - c = 11 \\ 3b - 3c = 26 \end{cases}$

$b - c = 11$, dan moet $3b - 3c$ gelijk zijn aan 33! Dus stelsel is strijdig.

1.28 Het gevraagde komt neer op het oplossen van de ongelijkheid (het wiskundige model) $20\,000 + 1\frac{1}{2}p < 3p$. Grafisch betekent dit dat de grafiek van $k = 20\,000 + 1\frac{1}{2}p$ onder de grafiek ligt van $k = 3p$, zie fig. 1.2. Daartoe berekenen we het snijpunt van de grafieken. Dit kan berekend worden door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} k = 20\,000 + 1\frac{1}{2}p \\ k = 3p \end{cases}$$

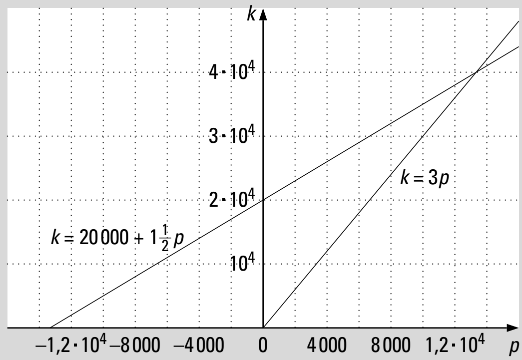
De oplossing is: $k = 40\,000$ en $p = 13\,333\,\frac{1}{3}$. Dus als het aantal verreden kilometers p meer dan $13\,333\,\frac{1}{3}$ bedraagt, dan is het aanschaffen van een vrachtauto voordeliger dan het leasen ervan.

1.29 Uit de tekst zijn de volgende vergelijkingen af te leiden:
$A + B + C = 25\,000$; $0{,}06 \cdot A + 0{,}07 \cdot B + 0{,}08 \cdot C = 1620$; $B - C = 6\,000$
We lossen dus het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} A + B + C = 25\,000 \\ 0{,}06 \cdot A + 0{,}07 \cdot B + 0{,}08 \cdot C = 1\,620 \\ B - C = 6\,000 \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is $A = €15.000$, $B = €8.000$ en $C = €2.000$.

Figuur 1.2



1.30 a $\begin{cases} y = -x + k \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + k \\ x^2 + (-x + k)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + k \\ 2x^2 - 2kx + k^2 - 9 = 0 \end{cases}$

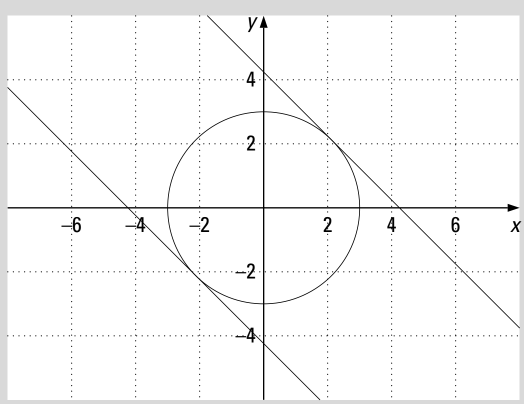
b De vergelijking $2x^2 - 2kx + k^2 - 9 = 0$ heeft precies één oplossing. Dan moet de discriminant van de vergelijking gelijk zijn aan 0. Dus geldt $4k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 9) = 0$. De oplossing hiervan is $k = -3\sqrt{2}$ of $k = 3\sqrt{2}$.

c Als we deze waarden voor k invullen in het stelsel uit opgave **a**, dan krijgen we de volgende twee stelsels die moeten worden opgelost:

$\begin{cases} y = -x - 3\sqrt{2} \\ 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 - 9 = 0 \end{cases}$ en het stelsel $\begin{cases} y = -x + 3\sqrt{2} \\ 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 - 9 = 0 \end{cases}$

De oplossing van het eerste stelsel is $x = -1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $y = -1\frac{1}{2}\sqrt{2}$, de coördinaten van het linker raakpunt uit de figuur. De oplossing van tweede stelsel is $x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $y = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$, de coördinaten van het rechter raakpunt.

Figuur 1.3 **Cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$**



Eindtoets

1 a $(0{,}2 - x)(0{,}2 + x) = \{\text{regel 6}\}\ 0{,}04 - x^2$

b $(4x + 7y)^2 = \{\text{regel 7}\}\ 16x^2 + 56xy + 49y^2$

c $(a - 4)(a + 4)(a^2 + 16) = \{\text{regel 6}\}\ (a^2 - 16)(a^2 + 16)$
$= \{\text{regel 6}\}\ a^4 - 256$

d $(5 + 2p)(5 - 2p)(25 - 4p^2) = \{\text{regel 6}\}\ (25 - 4p^2)(25 - 4p^2)$
$= \{\text{regel 8}\}\ 625 - 200p^2 + 16p^4$

e $(4x + 3)(x - 5) = \{\text{regel 4}\}\ 4x^2 - 20x + 3x - 15 = 4x^2 - 17x - 15$

f $(t^3 - 6)^2 = \{\text{regel 8}\}\ t^6 - 12t^3 + 36$

2 a $x^2 - 15x + 26 = \{\text{regel 11}\}\ (x - 2)(x - 13)$

b $y^4 - 64y^2 = \{\text{regel 9}\}\ y^2(y^2 - 64) = \{\text{regel 12}\}\ y^2(y + 8)(y - 8)$

c $49t^2 - 14t + 1 = \{\text{na herschrijven, regel 14}\}\ (7t)^2 - 14t + 1$
$= (7t - 1)^2$

d $9a^7b + 12a^6b^2 + 4a^5b^3 = \{\text{regel 9}\}\ a^5b\,(9a^2 + 12ab + 4b^2)$
$= \{\text{na herschrijven, regel 13}\}$
$a^5b((3a)^2 + 12ab + (2b)^2)$
$= a^5b(3a + 2b)^2$

e $2x^2 - 3x - 5$
Probeer $(x + a)(2x + b)$, met $2a + b = -3$ en $a \cdot b = -5$;
we vinden $a = 1$ en $b = -5$; de uitkomst is: $(x + 1)(2x - 5)$

3 a $(7 + 0{,}005)^2 \cdot 7 - 7^3 = 7 \cdot ((7 + 0{,}005)^2 - 7^2)$
$= 7 \cdot (7 + 0{,}005 + 7)(7 + 0{,}005 - 7)$
$= 7 \cdot 14{,}005 \cdot 0{,}005 = 0{,}490175$

b $(7 + 0{,}005)^3 - 7^3 \approx 0{,}73553$

4 a $6x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} D = 169, een kwadraat en dus is de veelterm te ontbinden. Probeer $(2x + a)(3x + b)$, met $3a + 2b = 5$ en $a \cdot b = -6$; we vinden $a = 3$ en $b = -2$; de vergelijking wordt: $(2x + 3)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow$ {factoren op 0 stellen} $2x + 3 = 0$ of $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$x = -1\frac{1}{2}$ of $x = \frac{2}{3}$

b $p^2 - 24p + 225 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} $D = -324 < 0$. Geen oplossing.

c $s^2 - 11s + 32 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} $D = -7 < 0$. Geen oplossing.

d $t^2 - 11t + 30 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} D = 1, een kwadraat en dus is de veelterm te ontbinden $\Leftrightarrow (t - 5)(t - 6) = 0 \Leftrightarrow$
{factoren op 0 stellen} $t - 5 = 0$ of $t - 6 = 0 \Leftrightarrow$
{vergelijkingen oplossen} $t = 5$ of $t = 6$

e $y^2 - 11y + 25 = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} $D = 21 > 0 \Leftrightarrow$
{abc-formule} $t = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ of $t = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

f $q^2 - 11q + 30\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$ {D bepalen} De = 0, dus is er één oplossing $\Leftrightarrow$
{na herschrijven, regel 6}
$q^2 - 11q + \frac{121}{4} = q^2 - 11q + (\frac{11}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (q - \frac{11}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow$
{factor op 0 stellen} $q - \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow$
{vergelijking oplossen} $q = 5\frac{1}{2}$

5 $D = (2k + 3)^2 - 12k = 4k^2 + 12k + 9 - 12k = 4k^2 + 9 > 0$.
Dus altijd twee oplossingen!

6 Stel de lengte gelijk aan l en de breedte gelijk aan b. Dan geldt:
$2l + 2b = 74$ en $l \cdot b = 300$. Het berekenen van l en b komt neer op het oplossen van het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2l + 2b = 74 \\ l \cdot b = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{300}{b} + 2b = 74 \\ l = \dfrac{300}{b}, b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600 + 2b^2 = 74b \\ l = \dfrac{300}{b}, b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2b^2 - 74b + 600 = 0 \\ l = \dfrac{300}{b}, b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 37b + 300 = 0 \\ l = \dfrac{300}{b}, b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \text{ of } b = 25 \\ l = 25 \text{ of } b = 12 \end{cases}$$

7 Stel dat men x kilo van de 25 mengt met N&N's. Deze hoeveelheid kost dan $4x$ euro. Van het andere merk zit dan $(25 – x)$ kilo in het mengsel. Deze hoeveelheid kost $3 \cdot (25 - x)$ euro.
Voor dit mengsel geldt nu $\frac{4x \cdot +3 \cdot (25 - x)}{25} = 3{,}60$. Deze vergelijking is gelijkwaardig aan de vergelijking $4x + 3 \cdot (25 - x) = 90$.
De oplossing van deze vergelijking is $x = 15$. Dus er is 15 kilo N&N's vermengd met 10 kilo van een onbekend merk.

8 Als we de cijfers van het gezochte getal achtereenvolgens voorstellen met x, y en z dan kan het gegeven 'Een getal van drie cijfers is gelijk aan vijftien keer de som van zijn cijfers' vertaald worden in $100x + 10y + z = 15 \cdot (x + y + z)$
Het gegeven 'Als de cijfers van het getal in omgekeerde volgorde worden geplaatst, dan is het nieuwe getal 396 groter dan het oorspronkelijke getal' kan vertaald worden in $(100z + 10y + x) - (100x + 10y + z) = 396$.
Het gegeven 'het laatste cijfer is één groter dan de som van de andere twee' kan vertaald worden in $z - (x + y) = 1$.
We moeten dus een stelsel van drie vergelijkingen oplossen. De oplossing is $x = 1$, $y = 3$ en $z = 5$.

9 a $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2y - 6x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y - 1 \\ 6x = 2y - 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x = 3y - 1 \\ 9y - 3 = 2y - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 19 \\ \quad\; 5y - \;\; z = \;\; 5 \\ \;\; x + y + \;\; z = \;\; 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z + 14 - 3y + 5z = 19 \\ 5y - z = 5 \\ x = -y - z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

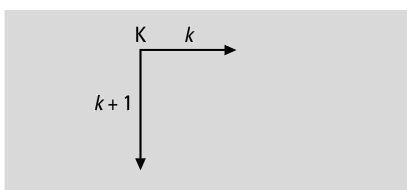
$$\begin{cases} -5y + 3z = 5 \\ 5y - z = 5 \\ x = -y - z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y - 15 = 5 \\ z = 5y - 5 \\ x = -y - z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

10 Stel het aantal zwart-wit-afdrukken is gelijk aan x. De jaarlijkse kosten k in euro bij een HP 660 bedragen dan:
$k = 59{,}67 + 0{,}12x + 40 \cdot 1{,}10 = 103{,}67 + 0{,}12x$
De jaarlijkse kosten k in euro bij een HP 720C bedragen
$91{,}33 + 0{,}08x + 40 \cdot 0{,}90 = 127{,}33 + 0{,}08x$.
We lossen x op uit $103{,}67 + 0{,}12x < 127{,}33 + 0{,}08x$ en vinden $x \leq 591$.

11 Het stelsel is identiek; antwoord **b** is juist.

12 D = –24. De vkv heeft geen reële oplossingen; antwoord **c** is juist.

13 De **knoop** is een eenheid van snelheid die veel gebruikt wordt in de zeevaart en in de luchtvaart. Eén knoop is één zeemijl per uur. Eén zeemijl is 1852 meter. Een knoop is dus een snelheid van 0,514 m/s. De definitie is eenvoudig op internet te achterhalen.
Bij de gegeven situatie kan de volgende schets gemaakt worden:



hierbij is k het aantal knopen waarmee het ene schip vaart en $(k + 1)$ het aantal knopen waarmee het andere schip vaart.
Na vijf uur heeft het ene schip $5k$ zeemijlen afgelegd en het andere schip $5(k + 1)$ zeemijlen.
Met de stelling van Pythagoras is de afstand te bepalen:
$25k^2 + 25(k + 1)^2 = 145$ ofwel $25k^2 + 25k^2 + 50k + 25 = 15.325$. Deze vergelijking is gelijkwaardig met $50k^2 + 50k - 15.300 = 0$.
De oplossing van deze vierkantsvergelijking wordt met de wortelformule gevonden worden $k = 17$ knopen. De snelheid van het andere schip is dan 18 knopen.

Leereenheid 1.2

Breuken bewerken

Diagnostische toets

1 a $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x + y)(x - y)}{x - y} = x + y$

b $\dfrac{(x + y) - (x - 2y)}{3x} = \dfrac{x + y - x + 2y}{3x} = \dfrac{3y}{3x} = \dfrac{y}{x}$

c $\dfrac{\frac{a}{bc}}{abc} = \dfrac{a}{bc} \cdot \dfrac{1}{abc} = \dfrac{a}{ab^2c^2} = \dfrac{1}{b^2c^2}$

2 a $\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{(1 + x)(1 - x)}$

$= \dfrac{1 + x}{(1 + x)(1 - x)} - \dfrac{1}{(1 + x)(1 - x)}$

$= \dfrac{1 + x - 1}{(1 + x)(1 - x)} = \dfrac{x}{(1 + x)(1 - x)}$

b $\dfrac{1}{x - 10} - 1 = \dfrac{1}{x - 10} - \dfrac{x - 10}{x - 10} = \dfrac{1 - x + 10}{x - 10} = \dfrac{11 - x}{x - 10}$

c $(a - b)^2 \cdot \dfrac{1}{a^2 - b^2} = \dfrac{(a - b)^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{(a - b)(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{a - b}{a + b}$

3 a $x^2 + 3x \,/\, x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \,\backslash\, x^3 - x^2 + 1$

$$\begin{array}{l}
x^5 + 3x^4 \\
\hline
-x^4 - 3x^3 \\
-x^4 - 3x^3 \\
\hline
0 + x^2 + 2x \\
\quad x^2 + 3x + \\
\hline
\quad -x + 1
\end{array}$$

Dus: $\dfrac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x} = x^3 - x^2 + 1 + \dfrac{-x + 1}{x^2 + 3x}$

b $x + 2 \,/\, x^3 \qquad - x \,\backslash\, x^2 - 2x + 3$

$$\begin{array}{l}
x^3 + 2x^2 - \\
\hline
-2x^2 - x \\
-2x^2 - 4x \\
\hline
3x \\
3x + 6 \\
\hline
-6
\end{array}$$

Dus: $\dfrac{x^3 - x}{x + 2} = x^2 - 2x + 3 + \dfrac{-6}{x + 2}$

4 We zoeken eerst het nulpunt van $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. We zien dat $x = 1$ een nulpunt van $f(x)$ is, zodat $(x - 1)$ een factor is van $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. De andere factor bepalen we met de staartdeling:

$x - 1 / x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \backslash x^2 - x - 6$

$$\begin{array}{l}
x^3 - x^2 \\
\hline
-x^2 - 5x \\
-x^2 + x \\
\hline
-6x + 6 \\
-6x + 6 \\
\hline
0
\end{array}$$

Dus: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$
Na verder ontbinden van $x^2 - x - 6$ levert dit uiteindelijk:
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

5 a $\dfrac{x^2}{x - 4} = 1 + \dfrac{16}{x - 4} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x - 4} = \dfrac{x - 4}{x - 4} + \dfrac{16}{x - 4} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x - 4} = \dfrac{x + 12}{x - 4}$

$\Leftrightarrow x^2 = x + 12$ en $x \neq 4$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$ en $x \neq 4$
$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$ en $x \neq 4$
$\Rightarrow x = -3$

b $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} = \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x(x-1)} = \frac{3}{x+1}$

$\Leftrightarrow (3x-2)(x+1) = 3x(x-1)$ en $x \neq 0$ en $x \neq 1$ en $x \neq -1$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 2x - 2 = 3x^2 - 3x$ en $x \neq 0$ en $x \neq 1$ en $x \neq -1$
$\Leftrightarrow 4x - 2 = 0$ en $x \neq 0$ en $x \neq 1$ en $x \neq -1$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

6 $\frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} = \frac{x+2}{x+2}$
$\Leftrightarrow x^2 = x + 2$ en $x \neq -2$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ en $x \neq -2$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$ en $x \neq -2$
$\Rightarrow x = -1$ of $x = 2$
Deze vergelijking heeft dus precies twee oplossingen. Maar de som van deze oplossingen is niet –1, maar gelijk aan 1. De bewering is dus niet juist.

7 $\frac{c}{a-b} = \frac{d}{a-f} \Leftrightarrow d(a-b) = c(a-f)$
$\Leftrightarrow ad - bd = ac - cf \Leftrightarrow bd = ad - ac + cf \Leftrightarrow b = \frac{ad - ac + cf}{d}$

8 $P = \frac{M^2 \cdot H}{v \cdot (M+m) \cdot h} \Leftrightarrow P \cdot v \cdot (M+m) \cdot h = M^2 \cdot H$
$\Leftrightarrow P \cdot v \cdot M \cdot h + P \cdot v \cdot m \cdot h = M^2 \cdot H$
$\Leftrightarrow P \cdot v \cdot m \cdot h = M^2 \cdot H - P \cdot v \cdot M \cdot h$
$\Leftrightarrow m = \frac{M^2 \cdot H - P \cdot v \cdot M \cdot h}{P \cdot v \cdot h}$

Praktijksituatie

Opdrachten

1 Over 100 km doet iemand die 25 km per uur rijdt
$\frac{100 \text{ km}}{25 \text{ km per uur}} = 4$ uur, terwijl iemand die 20 km per uur rijdt daar
$\frac{100 \text{ km}}{20 \text{ km per uur}} = 5$ uur over doet.

1.2.1 Rekenregels

Opdrachten

2 a $\frac{50}{\frac{1}{4}} = 200$

b $\frac{3}{\frac{1}{16}} = 48$

c $\frac{10}{-\frac{1}{4}} = -40$

d $\frac{-6}{3} = -2$

e $\frac{1}{0{,}05} = \frac{1}{\frac{5}{100}} = \frac{100}{5} = 20$

f $\dfrac{0{,}6}{0{,}3} = \dfrac{6}{3} = 2$

g $\dfrac{1\frac{4}{7}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{\frac{11}{7}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{11}{7} \cdot \dfrac{7}{3} = \dfrac{11}{3}$

h $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

3 a $-\dfrac{2}{a^2 - 1} = \dfrac{-2}{a^2 - 1}$ of $-\dfrac{2}{a^2 - 1} = \dfrac{2}{1 - a^2}$

b $-\dfrac{(x + y)(x - y)}{x^2 + y^2} = \dfrac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$

4 a $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 2)(x + 2)} = \dfrac{x + 3}{x + 2}$

b $\dfrac{x^2 + 5x}{x^2 - 25} = \dfrac{x(x + 5)}{(x + 5)(x - 5)} = \dfrac{x}{x - 5}$

Vraagstukken

1.31 a $\dfrac{a^3 - a}{a^2 - 1} = \dfrac{a(a^2 - 1)}{a^2 - 1} = a$

b $\dfrac{x^2 + xy}{x + y} = \dfrac{x(x + y)}{x + y} = x$

c $\dfrac{x - (x - y)}{y^2} = \dfrac{x - x + y}{y^2} = \dfrac{y}{y^2} = \dfrac{1}{y}$

d $\dfrac{x^3 - x^2y^2}{x^2 - xy^2} = \dfrac{x^2(x - y^2)}{x(x - y^2)} = x$

e $\dfrac{y^7 - xy^6}{y^5 + x^5y^7} = \dfrac{y^6(y - x)}{y^5(1 + x^5y^2)} = \dfrac{y(y - x)}{1 + x^5y^2}$

f $\dfrac{a^2 + ab + a}{a} = \dfrac{a(a + b + 1)}{a} = a + b + 1$

g $\dfrac{a^2 \cdot ab \cdot a}{a} = \dfrac{a^4b}{a} = a^3b$

h $\dfrac{a + ab}{a} = \dfrac{a(1 + b)}{a} = 1 + b$

i $\dfrac{ax \cdot ay}{az} = \dfrac{a^2xy}{az} = \dfrac{axy}{z}$

1.32 a $\dfrac{5x^4y^5z^2}{10x^3y^4z^4} = \dfrac{xy}{2z^2}$

b $\dfrac{-a^2(a - b)}{a(a - b)} = -a$

c $\dfrac{a - a^3}{a^4 - 1} = \dfrac{a(1 - a^2)}{\left((a^2)^2 - 1\right)} = \dfrac{-a(a^2 - 1)}{(a^2 + 1)(a^2 - 1)} - \dfrac{-a}{a^2 + 1}$

d $\dfrac{b}{\frac{1}{a}} = ab$

e $\dfrac{xy}{\frac{y}{2}} = xy \cdot \dfrac{2}{y} = 2x$

f $\dfrac{(x - y) - (x - 3y)}{2x} = \dfrac{x - y - x + 3y}{2x} = \dfrac{2y}{2x} = \dfrac{y}{x}$

g $\dfrac{x - y}{\dfrac{1}{x + y}} = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

h $\dfrac{ab + bc}{b} = \dfrac{b(a + c)}{b} = a + c$

i $\dfrac{\frac{2}{3}}{x} = 2 \cdot \dfrac{x}{3} = \dfrac{2x}{3}$

j $\dfrac{abc}{\dfrac{bc}{a}} = abc \cdot \dfrac{a}{bc} = \dfrac{a^2bc}{bc} = a^2$

k $\dfrac{\dfrac{abc}{bc}}{a} = \dfrac{abc}{bc} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{abc}{abc} = 1$

1.2.2 Rekenkundige bewerkingen met breuken

Opdrachten

5 a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \dfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$

b $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} + \dfrac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \dfrac{7}{14} + \dfrac{4}{14} = \dfrac{11}{14}$

c $\dfrac{3}{8} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{3}{2^3} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3} = \dfrac{3 \cdot 3}{2^3 \cdot 3} + \dfrac{5 \cdot 2}{2^3 \cdot 3} = \dfrac{9}{24} + \dfrac{10}{24} = \dfrac{19}{24}$

d $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{15} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{3 \cdot 5} - \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 5} + \dfrac{4 \cdot 3}{3^2 \cdot 5} - \dfrac{5}{3^2 \cdot 5}$

$= \dfrac{18}{45} + \dfrac{12}{45} - \dfrac{5}{45} = \dfrac{25}{45} = \dfrac{5}{9}$

e $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{3}{2^2} - \dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{4}{3 \cdot 5} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} - \dfrac{2 \cdot 3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{4 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$

$= \dfrac{45}{60} - \dfrac{30}{60} + \dfrac{16}{60} = \dfrac{31}{60}$

6 a $\dfrac{1}{ac} + \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{ac} + \dfrac{2c}{ac} = \dfrac{1 + 2c}{ac}$

b $a + \frac{1}{a} = \frac{a}{1} + \frac{1}{a} = \frac{a \cdot a}{a} + \frac{1}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{1}{a}$

$$= \frac{a^2 + 1}{a}$$

c $\frac{2}{a} - \frac{1}{x} = \frac{2x}{ax} - \frac{1 \cdot a}{ax} = \frac{2x - a}{ax}$

d $\frac{1}{3a^2b} + \frac{1}{4ab^2} + \frac{1}{5b^3}$

$$= \frac{4 \cdot 5b^2}{3 \cdot 4 \cdot 5a^2b^3} + \frac{3 \cdot 5ab}{3 \cdot 4 \cdot 5a^2b^3} + \frac{3 \cdot 4a^2}{3 \cdot 4 \cdot 5a^2b^3}$$

$$= \frac{20b^2 + 15ab + 12a^2}{60a^2b^3}$$

e $\frac{1}{9(x-y)^2} + \frac{1}{30(x-y)(x+y)^2} + \frac{1}{18(x-y)^3(x+y)}$

$$= \frac{1}{3^2(x-y)^2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5(x-y)(x+y)^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2(x-y)^3(x+y)}$$

$$= \frac{2 \cdot 5(x-y)(x+y)^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 5(x-y)^3(x+y)^2} + \frac{3(x-y)^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 5(x-y)^3(x+y)^2} +$$

$$\frac{5(x+y)}{2 \cdot 3^2 \cdot 5(x-y)^3(x+y)^2} = \frac{10(x-y)(x+y)^2 + 3(x-y)^2 + 5(x+y)}{90(x-y)^3(x+y)^2}$$

f $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{(x+1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{2x}{x(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

Vraagstukken

1.33 a aantal leerlingen dat met de fiets komt is:
$\frac{13}{18} \cdot 900 = \frac{13 \cdot 900}{18} = 650$

b aantal leerlingen dat met de bus komt is:
$\frac{2}{9} \cdot 900 = \frac{2 \cdot 900}{9} = 200$

1.34 aantal folders dat Piet rondbrengt is: $\frac{1}{3} \cdot 456 = 152$

aantal folders dat Karel rondbrengt is: $\frac{3}{8} \cdot 456 = 171$

aantal folders dat Dinie rondbrengt is: $456 - 152 - 171 = 133$

1.35 Na de vlucht is er nog $\frac{6}{11}$ deel van de brandstof over.

Als het vliegtuig met $\frac{5}{11}$ deel van de brandstof 1350 km kan vliegen, dan kan het met $\frac{6}{11}$ deel vliegen:

$$\frac{1\,350}{\frac{5}{11}} \cdot \frac{6}{11} = 1\,350 \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{1350 \cdot 6}{5} = 1\,620 \text{ kilometer}$$

1.36 a $\frac{a+c}{c^2} - \frac{1}{c} = \frac{a+c}{c^2} - \frac{c}{c^2} = \frac{a+c-c}{c^2} = \frac{a}{c^2}$

b $\frac{1}{4(1-x)} - \frac{1}{8(1-x^2)} = \frac{1}{2^2(1-x)} - \frac{1}{2^3(1+x)(1-x)}$

$$= \frac{2(1+x)}{2^3(1+x)(1-x)} - \frac{1}{2^3(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{2+2x-1}{2^3(1+x)(1-x)} = \frac{1+2x}{2^3(1+x)(1-x)}$$

c $\frac{a}{a-b} + \frac{ab}{(b-a)^2} = \frac{a}{a-b} + \frac{ab}{(a-b)^2} = \frac{a(a-b)}{(a-b)^2} + \frac{ab}{(a-b)^2}$

$$= \frac{a^2-ab+ab}{(a-b)^2} = \frac{a^2}{(a-b)^2}$$

d $5 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{5x^2(1-x)}{x^2(1-x)} - \frac{(1-x)}{x^2(1-x)} - \frac{x^2}{x^2(1-x)}$

$$\frac{5x^2-5x^3-1+x-x^2}{x^2(1-x)} = \frac{-5x^3+4x^2+x-1}{x^2(1-x)}$$

e $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{b}{a^2b^2} + \frac{a}{a^2b^2} = \frac{b+a}{a^2b^2}$

f $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1-x}{x}$

1.37 a $\frac{3x^2y}{z^2} \cdot \left(\frac{2z}{xy}\right)^2 \cdot \frac{x}{yz} = \frac{3x^2y}{z^2} \cdot \frac{4z^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x}{yz} = \frac{12x^3yz^2}{x^2y^3z^3} = \frac{12x}{y^2z}$

b $x - \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{x^2+x-x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$

c $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a-b} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}$

$$= \frac{a^2-ab+a^2+ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a^2}{(a+b)(a-b)}$$

d $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)}$$

e $\frac{t^2}{t-2} + \frac{4}{2-t} = \frac{t^2}{t-2} + \frac{-4}{t-2} = \frac{t^2-4}{t-2} = \frac{(t+2)(t-2)}{t-2} = t+2$

f $$\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-7x+6}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x-6)}$$
$$=\frac{x-6}{(x-1)(x-2)(x-6)}-\frac{x-2}{(x-1)(x-2)(x-6)}$$
$$=\frac{x-6-x+2}{(x-1)(x-2)(x-6)}=\frac{-4}{(x-1)(x-2)(x-6)}$$

g $$\frac{1}{x^2-x}-x=\frac{1}{x^2-x}-\frac{x(x^2-x)}{x^2-x}=\frac{-x^3+x^2+1}{x^2-x}$$

1.38 a $$\frac{y^2-xy}{x^2-xy}\cdot\frac{x^2+xy}{y^2+xy}=\frac{(y^2-xy)(x^2+xy)}{(x^2-xy)(y^2+xy)}=\frac{xy(y-x)(x+y)}{xy(x-y)(y+x)}=-1$$

b $$\frac{x^2+xy+xz}{y^2+xy-yz}\cdot\frac{xz+yz-z^2}{y^2+xy+yz}=\frac{(x^2+xy+xz)(xz+yz-z^2)}{(y^2+xy-yz)(y^2+xy+yz)}$$
$$=\frac{xz(x+y+z)(x+y-z)}{y^2(y+x-z)(y+x+z)}=\frac{xz}{y^2}$$

c $$\frac{5a+25}{a^2+2a-15}-\frac{6a-24}{a^2-6a+8}+\frac{7a-21}{a^2-5a+6}$$
$$=\frac{5(a+5)}{(a+5)(a-3)}-\frac{6(a-4)}{(a-4)(a-2)}+\frac{7(a-3)}{(a-2)(a-3)}$$
$$=\frac{5}{(a-3)}-\frac{6}{(a-2)}+\frac{7}{(a-2)}$$
$$=\frac{5(a-2)}{(a-3)(a-2)}-\frac{6(a-3)}{(a-2)(a-3)}+\frac{7(a-3)}{(a-2)(a-3)}$$
$$=\frac{5a-10-6a+18+7a-21}{(a-3)(a-2)}=\frac{6a-13}{(a-3)(a-2)}$$

1.2.3 Staartdelingen

Opdrachten

7 Geen uitwerking.

8 a $\frac{34\,564}{11}=3\,142\frac{2}{11}$ **b** $\frac{253\,768}{14}=18\,126\frac{4}{14}$

9 $$\begin{aligned}(x-1)(2x^2-3x+4)&=2x^3-3x^2+4x-2x^2+3x-4\\&=2x^3-5x^2+7x-4\end{aligned}$$

10 a
$$\begin{array}{l}x-1\ /\ x^5-x^4+6x^3-6x^2+x-1\ \backslash\ x^4+6x^2+1\\
\qquad\quad\ \ \underline{x^5-x^4}\ -\\
\qquad\qquad\qquad 0+6x^3\\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{+6x^3-6x^2}\ -\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0+x-1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \underline{x-1}\ -\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

$$\text{Dus: } \frac{x^5 - x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 1}{x - 1} = x^4 + 6x^2 + 1$$

b
$$\begin{array}{l}
x^2 + x \;/\; x^5 + 2x^4 \qquad - 2x^2 \qquad -6 \;\backslash\; x^3 + x^2 - x - 1 \\
\qquad \underline{x^5 + x^4} \; - \\
\qquad\quad x^4 \qquad - 2x^2 \\
\qquad\quad \underline{x^4 + x^3} \; - \\
\qquad\qquad -x^3 - 2x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-x^3 - x^2} \; - \\
\qquad\qquad\quad -x^2 \qquad -6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-x^2 - x} \; - \\
\qquad\qquad\qquad x - 6
\end{array}$$

$$\text{Dus: } \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 6}{x^2 + x} = x^3 + x^2 - x - 1 + \frac{x - 6}{x^2 + x}$$

c
$$\begin{array}{l}
x - 1 \;/\; x^4 \qquad\qquad -1 \;\backslash\; x^3 + x^2 + x + 1 \\
\qquad \underline{x^4 - x^3} \; - \\
\qquad\quad x^3 \\
\qquad\quad \underline{x^3 - x^2} \; - \\
\qquad\qquad x^2 \\
\qquad\qquad \underline{x^2 - x} \; - \\
\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x - 1} \; - \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\text{Dus: } \frac{x^4 - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 1$$

Vraagstukken **1.39 a**
$$\begin{array}{l}
x^2 - x - 1 \;/\; x^6 \qquad - 3x^4 \qquad + 2x^2 \qquad - 6 \;\backslash\; x^4 + x^3 - x^2 + 1 \\
\qquad \underline{x^6 - x^5 - x^4} \; - \\
\qquad\quad x^5 - 2x^4 \qquad + 2x^2 \\
\qquad\quad \underline{x^5 - x^4 - x^3} \; - \\
\qquad\qquad -x^4 + x^3 + 2x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-x^4 + x^3 + x^2} \; - \\
\qquad\qquad\quad x^2 \qquad - 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 - x - 1} \; - \\
\qquad\qquad\qquad x - 5
\end{array}$$

$$\text{Dus: } \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 6}{x^2 - x - 1} = x^4 + x^3 - x^2 + 1 + \frac{x - 5}{x^2 - x - 1}$$

b $x + 1 \,/\, x^4 \qquad\qquad -1 \,\backslash\, x^3 - x^2 + x - 1$

$x^4 + x^3$ −

$-x^3$

$-x^3 - x^2$ −

x^2

$x^2 + x$ −

$-x - 1$

$-x - 1$ −

0

Dus: $\dfrac{x^4 - 1}{x + 1} = x^3 - x^2 + x - 1$

c $x^2 - 3x + 2 \,/\, x^3 - 8x^2 + 17x - 10 \,\backslash\, x - 5$

$x^3 - 3x^2 + 2x$ −

$-5x^2 + 15x$

$-5x^2 + 15x - 10$ −

10

Dus: $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^2 - 3x + 2} = x - 5 + \dfrac{10}{x^2 - 3x + 2}$

1.40 a Een nulpunt van $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$ is $x = -1$, dus $(x + 1)$ is een factor in de ontbinding van $2x^3 + 5x^2 - 3$. Met een staartdeling vinden we:

$x + 1 \,/\, 2x^3 + 5x^2 \qquad -3 \,\backslash\, 2x^2 + 3x - 3$

$2x^3 + 2x^2$ −

$3x^2$

$3x^2 + 3x$ −

$-3x - 3$

$-3x - 3$ −

0

Dus: $2x^3 + 5x^2 - 3 = (x + 1)(2x^2 + 3x - 3)$

Verder ontbinden van de kwadratische vorm levert geen ‘nette’ factoren, zodat dit het eindresultaat is.

b Een nulpunt van $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$ is $x = 1$, zodat $(x – 1)$ een factor in de ontbinding is. Met een staartdeling vinden we:

$x - 1 \,/\, x^4 + x^3 \quad - 9x^2 + 11x - 4 \,\backslash\, x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

$x^4 - x^3$ −

$2x^3 - 9x^2$

$2x^3 - 2x^2$ −

$-7x^2 + 11x$

$-7x^2 + 7x$ −

$4x - 4$

$4x - 4$ −

0

Dus: $x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4 = (x - 1)(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$
Ook de derdegraadsveelterm ontbinden we met behulp van een staartdeling: een nulpunt van $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ is $x = 1$, zodat $(x - 1)$ een factor is van
$x^3 + 2x^2 - 7x + 4$. Met een staartdeling vinden we:

$$
\begin{array}{l}
x - 1 \;/\; x^3 + 2x^2 - 7x + 4 \;\backslash\; x^2 + 3x - 4 \\
\qquad\quad x^3 - x^2 \\
\qquad\quad \underline{\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\quad 3x^2 - 7x \\
\qquad\qquad\quad 3x^2 - 3x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad -4x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad -4x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

De uitkomst $x^2 + 3x - 4$ is verder te ontbinden tot $(x - 1)(x + 4)$, zodat we kunnen schrijven:
$x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x + 4)$

c $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ (De kwadratische vorm is niet verder te ontbinden.)

d $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

Alternatief:
Een nulpunt van $f(x) = x^4 - 1$ is $x = 1$, zodat $(x - 1)$ een factor in de ontbinding is. Met een staartdeling vinden we:

$$
\begin{array}{l}
x - 1 \;/\; x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -1 \;\backslash\; x^3 + x^2 + x + 1 \\
\qquad\quad x^4 - x^3 \\
\qquad\quad \underline{\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad\quad x^3 - 1 \\
\qquad\qquad\quad x^3 - x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad\qquad x^2 - 1 \\
\qquad\qquad\qquad x^2 - x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Een nulpunt van $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ is $x = -1$, zodat $(x + 1)$ een factor in de ontbinding is. Met een staartdeling vinden we:

$$
\begin{array}{l}
x + 1 \;/\; x^3 + x^2 + x + 1 \;\backslash\; x^2 + 1 \\
\qquad\quad x^3 + x^2 \\
\qquad\quad \underline{\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad\quad 0 + x + 1 \\
\qquad\qquad\quad x + 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

We kunnen dus schrijven:
$x^4 + 1 = (x - 1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$
$= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

1.2.4 Gebroken vergelijkingen

Opdrachten

11 Uit $\dfrac{x+3}{x-4} = \dfrac{1}{3}$ volgt $x - 4 = 3x + 9$, zodat $x = -6\frac{1}{2}$

12 We lossen b op uit $ac = \dfrac{a}{b} - 1$ als volgt:

$$ac = \frac{a}{b} - 1 \Leftrightarrow ac = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow abc = a - b$$

$$\Leftrightarrow abc + b = a \Leftrightarrow b(ac+1) = a \Leftrightarrow b = \frac{a}{ac+1} \text{ en } b \neq 0$$

Vraagstukken

1.41 a $\dfrac{2x+1}{2x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{2x-1} + \dfrac{2x-1}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{2x-1} = 0 \Rightarrow x = 0$

b $\dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-2} = 2\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 + (x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{5}{2}$$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 15x + 10 = 4x^2 - 12x + 10$ en $x \neq 1$ en $x \neq 2$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ en $x \neq 1$ en $x \neq 2$
$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = 3$

c $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+2} = 0$ en $x \neq 2$

$\Rightarrow x = 3$

d $\dfrac{x^2}{x+3} = \dfrac{9}{x+3} \Leftrightarrow x^2 = 9$ en $x \neq - \Rightarrow x = 3$

e $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{4}{1-x} \Rightarrow x = \frac{17}{11} = 1\frac{6}{11}$

f $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x}{x+2} \Rightarrow$ geen enkele x voldoet

1.42 a $\dfrac{c}{a} = 1 - b \Leftrightarrow a(1-b) = c \Leftrightarrow a = \dfrac{c}{1-b}$ en $a \neq 0$ en $b \neq 1$

b $a - b = \dfrac{ac}{d} \Leftrightarrow a - \dfrac{ac}{d} = b \Leftrightarrow a\left(1 - \dfrac{c}{d}\right) = b \Leftrightarrow a = \dfrac{b}{1 - \dfrac{c}{d}}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{bd}{d} -$ en $d \neq 0$ en $d \neq c$

c $\dfrac{a}{bc} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow a = b + c$ en $b \neq 0$ en $c \neq 0$

1.43 a $c = \dfrac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \Leftrightarrow cm + c\sqrt{R} = 100\sqrt{R} \Leftrightarrow cm = 100\sqrt{R} - c\sqrt{R}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{(100-c)\sqrt{R}}{c}$

b $c = \dfrac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \Leftrightarrow cm + c\sqrt{R} = 100\sqrt{R} \Leftrightarrow 100\sqrt{R} - c\sqrt{R} = cm$

$\Leftrightarrow (100 - c)\sqrt{R} = cm \Leftrightarrow (100 - c)^2 R = c^2 m^2$

$\Leftrightarrow R = \dfrac{c^2 m^2}{(100 - c)^2}$ en $c \neq 100$

1.44 De onbekende is de snelheid v, die de leerling onder normale omstandigheden aanhoudt. De benodigde tijd om naar school te komen is dan $\dfrac{6}{v}$ uur.
Op de bewuste dag dat hij een snelheid aanhoudt van $v + 3$ km per uur, is de benodigde tijd $\dfrac{6}{v+3}$ uur.
Omdat hij op die dag 4 minuten, ofwel $\frac{1}{15}$ uur, minder tijd heeft, geldt de volgende relatie waaruit we v kunnen berekenen:

$\dfrac{6}{v} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{6}{v+3}$

(De normaal benodigde tijd minus 4 minuten is de benodigde tijd op deze bewuste dag.)

$\Leftrightarrow \dfrac{90}{15v} - \dfrac{v}{15v} = \dfrac{6}{v+3} \Leftrightarrow \dfrac{90 - v}{15v} = \dfrac{6}{v+3}$

$\Leftrightarrow (90 - v)(v + 3) = 90v$ en $v \neq 0$ en $v \neq -3$

$\Leftrightarrow -v^2 + 87v + 270 = 90v$ en $v \neq 0$ en $v \neq -3$

$\Leftrightarrow v^2 + 3v - 270 = 0$ en $v \neq 0$ en $v \neq -3$

$\Leftrightarrow (v + 18)(v - 15) = 0$ en $v \neq 0$ en $v \neq -3$

$\Rightarrow v = -18$(voldoet niet) of $v = 15$

De gevraagde snelheid is dus 15 km per uur. Als deze leerling 4 minuten later vertrekt dan gewoonlijk, moet hij 18 km per uur fietsen om op tijd te komen.

1.45 Gegeven is $f = \dfrac{q \cdot a^4}{8E \cdot I} + \dfrac{q \cdot a^3 \cdot b}{6E \cdot I} - \dfrac{P \cdot l^3}{3E \cdot I}$. Met $f = 0, a = \frac{1}{2}l$ en dus ook $b = \frac{1}{2}l$ vinden we:

$0 = \dfrac{q \cdot \frac{1}{16}l^4}{8E \cdot I} + \dfrac{q \cdot \frac{1}{8}l^3 \cdot \frac{1}{2}l}{6E \cdot I} - \dfrac{P \cdot l^3}{3E \cdot I} \Leftrightarrow \dfrac{P \cdot l^3}{3E \cdot I} = \dfrac{q \cdot l^4}{128E \cdot I} + \dfrac{q \cdot l^4}{96E \cdot I}$

$\Leftrightarrow P \cdot l^3 = \dfrac{q \cdot l^4 \cdot 3E \cdot I}{128E \cdot I} + \dfrac{q \cdot l^4 \cdot 3E \cdot I}{96E \cdot I}$

$\Leftrightarrow P = \dfrac{q \cdot l^4 \cdot 3E \cdot I}{128E \cdot I \cdot l^3} + \dfrac{q \cdot l^4 \cdot 3E \cdot I}{96E \cdot I \cdot l^3} \Leftrightarrow P = \dfrac{3q \cdot l}{128} + \dfrac{q \cdot l}{32}$

$\Leftrightarrow P = \dfrac{7q \cdot l}{128}$

1.46 a $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{v}; \dfrac{1}{b} = \dfrac{v - f}{vf}; b = \dfrac{v \cdot f}{v - f}.$

b $b = \dfrac{3 \cdot 0{,}4}{3 - 0{,}4} = \dfrac{1{,}2}{2{,}6} \approx 0{,}46$ m.

Eindtoets

1 a $\dfrac{x^2 - xy}{y^2 - xy} = -\dfrac{x}{y}$

b $\dfrac{y^2 - xy}{y^2 + xy} = \dfrac{y - x}{y + x}$

c $\dfrac{(x - y)^2 - x^2 + y}{xy} = \dfrac{y - 2x + 1}{x}$

2 a $\dfrac{1}{(x - y)(y - z)} - \dfrac{1}{(y - z)(z - x)} + \dfrac{1}{(x - z)(x - y)} = \dfrac{2}{(x - y)(y - z)}$

b $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + x - 6} + \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{2x + 8}{x + 3}$

c $\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\dfrac{1}{x - \sqrt{y}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

3 $\dfrac{2x^3 - 9x^2 - 32x - 21}{x - 7} = 2x^2 + 5x + 3$

4 $x^3 + 5x^2 - 12x - 4 = (x - 2)(x^2 + 7x + 2)$

5 a $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$

b $\dfrac{(4x - 3)(x + 1)}{4x^2 + x - 3} = 1 \Rightarrow x$ is een willekeurig reëel getal met uitzondering van $x = \frac{3}{4}$ en $x = -1$

6 $\dfrac{x^2}{x - 5} + 4 = \dfrac{25}{x - 5} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x - 5} + \dfrac{4(x - 5)}{x - 5} = \dfrac{25}{x - 5}$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 20 = 25$ en $x \neq 5$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 45 = 0$ en $x \neq 5$
$\Rightarrow x = -9$
De bewering is niet juist.

7 $\dfrac{c}{a - b} = \dfrac{d}{a - f} \Leftrightarrow a = \dfrac{cf - bd}{c - d}$ en $a \neq b$ en $a \neq f$ en $c \neq d$

8 $P = \dfrac{M^2 \cdot H}{v \cdot (M + m) \cdot h} \Leftrightarrow h = \dfrac{M^2 \cdot H}{P \cdot v \cdot (M + m)}$ en $v \neq 0$ en $h \neq 0$ en $M \neq -m$

Leereenheid 1.3

Machten nemen

Diagnostische toets

1 a $(a^{-3}b^4c^{-1})^2 \cdot (a^4b^{-2}c^{-1})^{-1} = a^{-6}b^8c^{-2} \cdot a^{-4}b^2c$

$= a^{-10}b^{10}c^{-1} = \dfrac{b^{10}}{a^{10}c}$

b $\dfrac{4 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot (10^{-2})^3}{8 \cdot (10^3 \cdot 10^{-5})^4} = \dfrac{4 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot (10^{-2})^4} = \dfrac{20 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-8}} = 2\tfrac{1}{2} \cdot 10^4$

c $\dfrac{(3a^{-2}b^{-8}) \cdot (a^0b^{-3})^{-2}}{(a^{-1}b^0c^2)^{-4}} = \dfrac{(3a^{-2}b^{-8}) \cdot b^6}{a^4c^{-8}} = \dfrac{3a^{-2}b^{-2}}{a^4c^{-8}} = \dfrac{3c^8}{a^6b^2}$

2 a $\sqrt[7]{a^5} = a^{\frac{5}{7}}$

b $a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^2 \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{2\frac{3}{4}}$

c $a \cdot \sqrt[3]{a} = a \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$

d $\dfrac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{1}{a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = a^{-2\frac{1}{2}}$

e $\dfrac{1}{a^3 \cdot \sqrt[5]{a}} \cdot \dfrac{1}{a^4 \cdot \sqrt[5]{a^4}} = \dfrac{1}{a^3 \cdot a^{\frac{1}{5}}} \cdot \dfrac{1}{a^4 \cdot a^{\frac{4}{5}}} = a^{-3\frac{1}{5}} \cdot a^{-4\frac{4}{5}} = a^{-8}$

f $\dfrac{\sqrt[15]{b^4}}{\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}} = \dfrac{b^{\frac{4}{15}}}{b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{b^{\frac{4}{15}}}{b^{\frac{19}{15}}} = b^{-1}$

3 a $x = 0$; we herleiden $y = 5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x-1}$ (met theorie van leereenheid 1.1) tot $5^x(5 - 3 - 3 \cdot \frac{1}{5}) = 5^x \cdot 1\frac{2}{5}$. Daarna voor $x = 0$ wordt $y = 1 \cdot 1\frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$

b $x = 1$; $y = 5 \cdot 1\frac{2}{5} = 7$

c $x = 2$; $y = 5^2 \cdot 1\frac{2}{5} = 25 \cdot 1\frac{2}{5} = 35$

Natuurlijk hoeft de uitdrukking van y niet eerst herleid te worden en kan de waarde van x direct ingevuld worden. Het eerst herleiden is in dit geval efficiënter!

4 $\sqrt[4]{\dfrac{625a^{20}b^{-12}}{81(a^2b^{-3})^{-12}}} = \sqrt[4]{\dfrac{625a^{20}b^{-12}}{81a^{-24}b^{36}}} = \sqrt[4]{\dfrac{625a^{44}}{81b^{48}}} = \dfrac{5a^{11}}{3b^{12}}$

5 $12\frac{1}{2}$% van 2^{-20} is gelijk aan: $\frac{1}{8} \cdot 2^{-20} = \dfrac{2^{-20}}{2^3} = \dfrac{1}{2^{23}}$

6 a $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$

b $a\sqrt{a} \cdot a^3 \cdot \sqrt{a} = a^4 \cdot \sqrt{a^2} = a^5$

c $p^2 \cdot \sqrt[5]{p^3} \cdot p \cdot \sqrt[5]{p^2} = p^3 \cdot \sqrt[5]{p^5} = p^4$

d $\dfrac{b^3 \cdot \sqrt[4]{b^3}}{b^5 \cdot \sqrt[6]{b^5}} = \dfrac{b^3 \cdot b^{\frac{3}{4}}}{b^5 \cdot b^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{b^{3\frac{3}{4}}}{b^{5\frac{5}{6}}} = b^{-2\frac{1}{12}} = \dfrac{1}{b^2 \cdot \sqrt[12]{b}}$

e $\dfrac{t^2 \cdot \sqrt[3]{t}}{\sqrt[5]{t^3}} \cdot \dfrac{t\sqrt{t}}{t^3 \cdot \sqrt[6]{t^5}} = \dfrac{t^{2\frac{1}{3}}}{t^{\frac{3}{5}}} \cdot \dfrac{t^{1\frac{1}{2}}}{t^{3\frac{5}{6}}} = \dfrac{t^{3\frac{5}{6}}}{t^{\frac{3}{5}} \cdot t^{3\frac{5}{6}}} = \dfrac{1}{t^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{t^3}}$

7 a $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. De bewering is niet juist.

b $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} \cdot = (5 \cdot 7)^{\frac{1}{4}} = 35^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{35}$. De bewering is niet juist.

c $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt[3]{6}$. De bewering is juist.

d $\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[10]{3^3}} = \dfrac{3^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{3}{10}}} = 3^{\frac{5}{10}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. De bewering is juist.

8 a $\dfrac{9{,}82 \cdot 10^4 \cdot 4{,}35 \cdot 10^{-4}}{5{,}2 \cdot 10^{-1} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}} = \dfrac{9{,}82 \cdot 4{,}35}{5{,}2 \cdot 1{,}2} \cdot \dfrac{10^4 \cdot 10^{-4}}{10^{-1} \cdot 10^{-4}}$

$\approx \dfrac{10 \cdot 4}{5 \cdot 1} \cdot \dfrac{1}{10^{-5}} = 8 \cdot 10^5$

b 1 kg = 1.000 g = 1.000.000 mg = 10^6 mg
1 mg = 0,001 g = 10^{-3} g
1 m^3 = 1.000.000.000 mm^3 = 10^9 mm^3.

9 a $548 = 2^9 + 2^5 + 2^2 = 2^{2^3+1} + 2^{2^2+1} + 2^2 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+1} + 2^2$

b $784 = 2^9 + 2^8 + 2^4 = 2^{2^3+1} + 2^{2^3} + 2^{2^2} = 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2}$

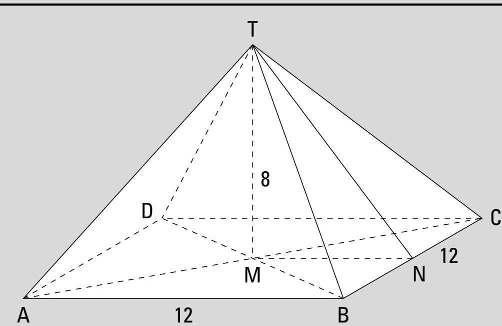
c $1358 = 2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2 = 2^{2^3+2} + 2^{2^3} + 2^{2^2+2} + 2^{2+1} + 2^2 + 2 =$
$2^{2^{2+1}+2} + 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+2} + 2^{2+1} + 2^2 + 2$

d $2774 = 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2 =$
$2^{2^3+3} + 2^{2^3+1} + 2^{2^2+3} + 2^{2^2+2} + 2^{2^2} + 2^2 + 2 =$
$2^{2^{2+1}+2+1} + 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2^2+2} + 2^{2^2} + 2^2 + 2$

e $11712 = 2^{13} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^6 =$
$2^{2^3+2^2+1} + 2^{2^3+2+1} + 2^{2^3+2} + 2^{2^3} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2^2+2} =$
$2^{2^{2+1}+2^2+1} + 2^{2^{2+1}+2+1} + 2^{2^{2+1}+2} + 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2^2+2}$.

10 a Oppervlakte piramide = oppervlakte grondvlak + oppervlakte opstaande vlakken = $12 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$ hoogte driehoek.
De hoogte van de driehoek = ?

Figuur 1.4 **Gebouw B**



Hoogte TN van ΔTBC is schuine zijde in ΔTMN.
Deze driehoek is namelijk rechthoekig in M.
TM = 8 en MN = 6. Dus met de stelling van Pythagoras is TN te berekenen: TN = 10.
De oppervlakte van ΔTBC = $\frac{1}{2}$ BC · TN = 6 · 10 = 60.
Oppervlakte pyramide = 144 + 240 = 384.

b We gaan de straal berekenen van de bol met dezelfde inhoud als die van gebouw A. Er geldt $468 = \frac{4}{3}\pi r$. We vinden voor $r \approx 4{,}816$.
De oppervlakte van het gebouw is $4\pi r^2 \approx 291{,}506$.

$$C = \frac{291{,}506}{384} \approx 0{,}759.$$

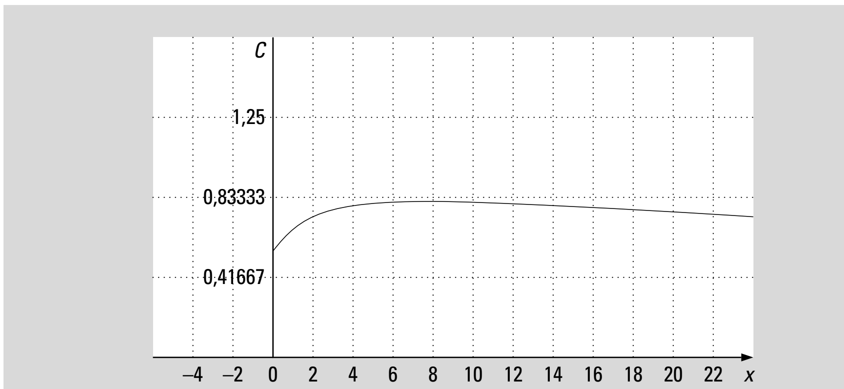
c $$C = \frac{4{,}84 I^{\frac{2}{3}}}{A} = \frac{4{,}84 \cdot r^2}{6r^2} \approx 0{,}81.$$

d Oppervlakte huis = 2 · opp. gevel + 2 · opp. zijwand + 2 · dakdeel + opp. grondvlak = 2 · (8*x* + 12) + 2 · 12*x* + 2 · 60 = 16*x* + 24 + 24*x* + 120 + 96 = 240 + 40*x*.

e We gaan de inhoud berekenen van het huis. Deze inhoud is gelijk aan:
Inhoud benedenverdieping + inhoud zolderverdieping =
$8 \cdot 12 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot 12 = 96x + 144$.

$$C = \frac{4{,}84 \cdot I^{\frac{2}{3}}}{A} = \frac{4{,}84 \cdot (96x + 144)^{\frac{2}{3}}}{240 + 40x}.$$

De grafiek ervan ziet er als volgt uit:



Met je rekenapparaat is na te gaan dat het maximum bereikt wordt voor $x = 7{,}5$.
De maximale waarde is dan 0,81 een waarde die ook al is gevonden bij antwoord **c**.

11 $1l = 1000$ ml $= 10^3$ ml
1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J
1 micron = 10^{-6}m
5.440.000.000 bits = $5{,}44 \cdot 10^9$ bits
10 megabyte = $1{,}25 \cdot 10^6$ bits
5 gigabyte = $6{,}25 \cdot 10^8$ bits.

1.3.1 Rekenregels voor machten met een gehele exponent

Opdrachten

1 a $3^7 \cdot 3^4 = 3^{7+4} = 3^{11}$

b $5^2 \cdot 7^3 \cdot 5^4 \cdot 5^3 \cdot 7^5 = 5^{2+4+3} \cdot 7^{3+5} = 5^9 \cdot 7^8$

c $(3^7)^4 = 3^{7 \cdot 4} = 3^{28}$

d $(a^m)^n = a^{mn}$

e $(7 \cdot 11)^8 = 7^8 \cdot 11^8$

f $(a \cdot b)^n = (ab)^n = a^n b^n$

2 a $\left(\frac{5}{7}\right)^{11} = \frac{5^{11}}{7^{11}}$

b $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$

c $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, als $m > n$

d $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, als $n > m$

e $a^0 = 1$, met a in $\mathbb{R}$ en $a \neq 0$

3 a $543\,000\,000 = 5{,}43 \cdot 10^8$

b $186 = 1{,}86 \cdot 10^2$

c $243{,}01 = 2{,}4301 \cdot 10^2$

d $0{,}000\,0007 = 7{,}0 \cdot 10^{-7}$

e $0{,}000\,23 = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$

4 a $-a^3 \cdot b^5 \cdot a^2 \cdot -a^7 \cdot -b^6 = -{}^{12}b^{11}$

b $(-x^4y^2z^5)^7 = -x^{28}y^{14}z^{35}$

c $(-p^2q^5)^3 \cdot (-(p^5q^3)^6) = -p^6q^{15} \cdot (-p^{30}q^{18}) = p^{36}q^{33}$

d $-\left(-\frac{a^2b^5c^3}{d^4e^3}\right)^5 = -\left(-\frac{a^{10}b^{25}c^{15}}{d^{20}e^{15}}\right) = \frac{a^{10}b^{25}c^{15}}{d^{20}e^{15}}$

e $\left(-\frac{p^3q^7r^2}{pr^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{p^2qr^4}{q^6r}\right)^3 = \frac{p^6q^{14}r^4}{p^2r^{10}} \cdot \left(-\frac{p^6q^3r^{12}}{q^{18}r^3}\right)$

$$= -\frac{p^{12}q^{17}r^{16}}{p^2q^{18}r^{13}} = -\frac{p^{10}r^3}{q}$$

Vraagstukken **1.47 a** $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^6}{2^6} \cdot \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}$

b $\left(-\frac{a}{b}\right)^3 = -\frac{a^3}{b^3}$

c $((x + y)^2)^3 = (x + y)^6$

d $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$

e $\left(\frac{2}{-5}\right)^5 = \frac{2^5}{-5^5} = \frac{32}{-3\,125} = -\frac{32}{3\,125}$

1.48 a $(a - b)^0 = 1$

b $\frac{z^8}{z^3} \cdot \frac{z^4}{8} = \frac{z^{12}}{8z^3} = \frac{z^9}{8} = \frac{1}{8}z^9$

c $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

d $\frac{x^2y^3}{xy} = xy^2$

e $a - b^0 = a - 1$

f $\frac{a^4 + b^4}{a^3} = \frac{a^4}{a^3} + \frac{b^4}{a^3} = a + \frac{b^4}{a^3}$

g $\frac{a^8}{a^4 + b^4} = \frac{a^8}{a^4 + b^4}$

h $\frac{(x^2y^3)^2}{(-x)^3} = \frac{x^4y^6}{-x^3} = -xy^6$

i $\frac{a^8}{a^4b^3} = \frac{a^4}{b^3}$

1.49 a $\left(\frac{a^pb^2}{c^5}\right)^m = \frac{a^{mp}b^{2m}}{c^{5m}}$

b $\frac{a^{p+1}b^{q+1}}{a^{p-1}b^{q-1}} = a^2b^2$

c $\frac{a^{p+3}b^{p+4}}{a^3b^p} = a^pb^4$

d $\left(\frac{a^{2p+3}}{a^p}\right)^3 = \frac{a^{6p+9}}{a^{3p}} = a^{3p+9}$

e $\left(\frac{a^4b^{3p}}{a^4}\right)^2 = \frac{a^8b^{6p}}{a^8} = b^{6p}$

1.50 a De snelheid van licht bedraagt 300 000 000 m/sec = $3 \cdot 10^8$ m/sec

b De massa van een stofdeeltje is 0,000 000 000 753 kg = $7{,}53 \cdot 10^{-10}$ kg

c $(5 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^5) = 30 \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^{10}$

d $(7 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^2) = 105 \cdot 10^{12} = 1{,}05 \cdot 10^{14}$

e $(6{,}1 \cdot 10^{-2}) \cdot (3{,}42 \cdot 10^{-8}) \cdot (8{,}125 \cdot 10^{-1}) = 169{,}503\,75 \cdot 10^{-11} =$
$1{,}695\,037\,5 \cdot 10^{-9}$.

1.3.2 Machten met een negatieve en gebroken exponent

Opdrachten

5 $(p^{-2}q^5r^{-1})^{-3} = p^6q^{-15}r^3 = \dfrac{p^6r^3}{q^{15}}$

6 $\left(\dfrac{a^2}{b^3c^5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{a^{-4}}{b^{-6}c^{-10}}\right) = \dfrac{b^6c^{10}}{a^4}$

7 a $\left(\dfrac{p^3q^4}{r^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{p^{1\frac{1}{2}}q^2}{r^{3\frac{1}{2}}} = \dfrac{pq^2\sqrt{p}}{r^3\cdot\sqrt{r}}$

b $(x^2yz^4)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1}y^{-\frac{1}{2}}z^{-2} = \dfrac{1}{xz^2\sqrt{y}}$

c $\sqrt[3]{x^4y^2z^7} = x^{1\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{2\frac{1}{3}} = xz^2\cdot\sqrt[3]{xy^2z}$

d $\dfrac{10}{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

e $\dfrac{(a^{\frac{1}{3}})^2\cdot(b^{\frac{2}{3}})^4}{a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{2\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{1\frac{1}{2}}} = ab^{1\frac{1}{6}} = ab\cdot\sqrt[6]{b}$

f $\dfrac{\sqrt{p}\cdot\sqrt[3]{pq}}{q^2} = \dfrac{p^{\frac{1}{2}}\cdot p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}{q^2} = \dfrac{p^{\frac{5}{6}}}{q^{1\frac{2}{3}}} = \dfrac{\sqrt[6]{p^5}}{q\cdot\sqrt[3]{q^2}}$

8 a $2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$

b $\sqrt[3]{5^9} = 5^{\frac{9}{3}} = 5^3 = 125$

c $(-\,5)^{\frac{9}{3}} = ((-5)^9)^{\frac{1}{3}} = (-1\,953\,125)^{\frac{1}{3}} = -125$

d $\sqrt[5]{(-3)^{10}} = \sqrt[5]{59\,049} = 9$

Vraagstukken

1.51 a $(a^{p-3})^5 \div \sqrt{a^{6p-4}} = \dfrac{a^{5p-15}}{a^{3p-2}} = a^{2p-13}$

b $\dfrac{(a^{3n})^2}{(a^2)^{n-1}} \div \sqrt[3]{a^{6n-3}} = \dfrac{a^{6n}}{a^{2n-2}}\cdot\dfrac{1}{a^{2n-1}} = \dfrac{a^{6n}}{a^{4n-3}} = a^{2n+3}$

c $\sqrt{a^2\cdot b^2} = ab$

d $\sqrt{a^4+b^4} = \sqrt{a^4+b^4}$

e $\sqrt[9]{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{3}{18}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

f $\sqrt{pq}\cdot\sqrt{pq^3} = p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\cdot p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} = pq^2$

g $\sqrt{a^2+2ab+b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$

h $\sqrt[3]{\dfrac{8a^9b}{27(a^{-3}b^2)^{-4}}} = \dfrac{8^{\frac{1}{3}}a^3b^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}a^4b^{-\frac{8}{3}}} = \dfrac{2b^3}{3a}$

1.52 $\sqrt{\dfrac{0{,}16 \cdot a^7b^4}{(a^{-1}c^2)^3}} = \dfrac{0{,}16^{\frac{1}{2}}a^{3\frac{1}{2}}b^2}{a^{-1\frac{1}{2}}c^3} = \dfrac{0{,}4a^5b^2}{c^3}$

1.53 a $120 = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{v}{10}\right)^{2,1}(\text{m}) \Leftrightarrow 480 = 3\left(\dfrac{v}{10}\right)^{2,1} \Leftrightarrow 160 = \left(\dfrac{v}{10}\right)^{2,1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{v}{10} = \sqrt[2,1]{160} \approx 11{,}2094 \Rightarrow v \approx 112{,}094$

b Analoog aan **a** geldt: $4 \cdot S_r = 3\left(\dfrac{v}{10}\right)^{2,1} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}S_r = \left(\dfrac{v}{10}\right)^{2,1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{v}{10} = \sqrt[2,1]{\tfrac{4}{3}S_r} \Leftrightarrow v = 10\sqrt[2,1]{\tfrac{4}{3}S_r}$

1.54 a $\dfrac{\sqrt{c} \div \sqrt[5]{c^2}}{c^{-2}} = \dfrac{c^{\frac{1}{2}} \cdot c^2}{c^{\frac{2}{5}}} = c^{2\frac{1}{10}} = c^2 \cdot \sqrt[10]{c}$

b $\dfrac{3^{\frac{5}{3}}}{(3^6)^{\frac{1}{9}}} = \dfrac{3^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

c $\sqrt[5]{a^3b^2} \div \sqrt[3]{ab^2} = \dfrac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{4}{15}}}{b^{\frac{4}{15}}} = \dfrac{\sqrt[15]{a^4}}{\sqrt[15]{b^4}}$

Verder uitgewerkt: $\sqrt[15]{\dfrac{a^4}{b^4}} = \sqrt[15]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^4}$

d $\sqrt[3]{\dfrac{81p^{-7}}{64(p^5q^2)^4}} = \dfrac{3^{1\frac{1}{3}}p^{-2\frac{1}{3}}}{2^2p^{6\frac{2}{3}}q^{2\frac{2}{3}}} = \dfrac{3\sqrt[3]{3}}{4p^9q^2 \cdot \sqrt[3]{q^2}}$

e $5^{\frac{3}{4}} \cdot (25^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} = 5^2 \cdot \sqrt[12]{5}$

f $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{1\frac{1}{2}}b}{a^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{a^{1\frac{5}{6}}b}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{1\frac{19}{30}}b = a \cdot \sqrt[30]{a^{19}} \cdot b$

g $\dfrac{(-5^6)^{\frac{3}{4}}}{(-5^3)^{\frac{2}{9}}}$ bestaat niet.

1.55 a Er geldt $H_{\text{koe}} = c \cdot \sqrt[3]{G^2} = 0{,}09 \cdot \sqrt[3]{500^2} \approx 5{,}670 \text{ m}^2$
$H_{\text{muis}} = c \cdot \sqrt[3]{G^2} = 0{,}09 \cdot \sqrt[3]{0{,}05^2} \approx 0{,}012 \text{ m}^2$

b De verhouding lichaamsgewichten koe en muis is
$G_{\text{koe}} : G_{\text{muis}} = 500 : 0{,}05 = 10\,000 : 1$.
De verhouding huidoppervlakten koe en muis is
$H_{\text{koe}} : H_{\text{muis}} = 5{,}670 : 0{,}012 = 472{,}5 : 1$.

c $H_{\text{ene soort}} : H_{\text{andere soort}} = c \cdot \sqrt[3]{8^2 \cdot G^2} : c \cdot \sqrt[3]{G^2} = (2^6 \cdot G^2)^{\frac{1}{3}} : G^{\frac{2}{3}} = 2^2 \cdot G^{\frac{2}{3}} : G^{\frac{2}{3}} = 4 : 1.$

d $H_{\text{ene soort}} : H_{\text{andere soort}} = c \cdot \sqrt[3]{7^2 \cdot G^2} : c \cdot \sqrt[3]{\cdot G^2} = 7^{\frac{2}{3}} \cdot G^{\frac{2}{3}} : G^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{2}{3}} : 1 = 3{,}66 : 1.$

e In het voorbeeld van de koe en de muis: de koe produceert meer warmte dan de muis. De verhouding in gewicht is 10 000 : 1, terwijl de verhouding huidoppervlak veel kleiner is, namelijk 472,5 : 1.

1.56 a 4^4

b 4^{10}

c $4^{10} = 1\,048\,576 = 1{,}05 \cdot 10^6$.

1.57 a $K = 1\,000 \cdot 1{,}04$

b $K = 1\,000 \cdot 1{,}04^2$

c $K = 1\,000 \cdot 1{,}04^{10}$

d

Aantal jaren *t*	Eindwaarde K	Aantal jaren *t*	Eindwaarde K	Aantal jaren *t*	Eindwaarde K	Aantal jaren *t*	Eindwaarde K
1	1040	5	1216,653	9	1423,312	13	1665,074
2	1081,6	6	1265,319	10	1480,244	14	1731,676
3	1124,864	7	1315,932	11	1539,454	15	1800,944
4	1169,859	8	1368,569	12	1601,032	16	1872,981

Dus na 16 jaar is het kapitaal aangegroeid tot een bedrag van €1.872,98.

1.3.3 De wortel uit een getal

Opdrachten

9 a $\sqrt{1\,080} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2^{1\frac{1}{2}} \cdot 3^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{30}$

b $(\sqrt{5})^3 = (5^{\frac{1}{2}})^3 = 5^{1\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

c $(\sqrt[4]{11})^7 = (11^{\frac{1}{4}})^7 = 11^{1\frac{3}{4}} = 11 \cdot \sqrt[4]{11^3}$

d $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ of $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{8}{2} = \sqrt{4} = 2$ of $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^1 = 2$

e $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = 3$

f $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

10 $\sqrt{-2} = x,\ x \geqq 0 \Rightarrow x^2 = -2$. Een kwadraat kan **nooit** negatief zijn.
Het uitgangspunt, $\sqrt{-2} = x$, is dus onjuist: $\sqrt{-2}$ bestaat niet.

Vraagstukken

1.58 a $\sqrt{72} = (2^3 \cdot 3^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}} \cdot 3 = 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}$

b $\sqrt{216} = (2^3 \cdot 3^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}} \cdot 3^{1\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

c $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = 4$

d $(\sqrt[3]{a})^6 = a^2$

e $(\sqrt[5]{a^2b^4}) \cdot (\sqrt[5]{a^4b^3}) \cdot (\sqrt[5]{a^3b^3}) = \sqrt[5]{a^9b^{10}} = ab^2\sqrt[5]{a^4}$

1.59 a $\sqrt{\dfrac{12\,250}{21\,500}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5^3 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 43}} = \dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{2}{43}} = \dfrac{7}{86}\sqrt{86}$

b $\sqrt{\dfrac{39\,366}{6\,561}} \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot 3^9}{3^8}} = \sqrt{6}$

c $\sqrt{\dfrac{10\,125}{19\,208}} = \sqrt{\dfrac{3^4 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 7^4}} = \dfrac{45}{98}\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{45}{98}\sqrt{\dfrac{10}{4}} = \dfrac{45}{196}\sqrt{10}$

d $\sqrt{\dfrac{10\,368}{5\,292}} = \sqrt{\dfrac{2^7 \cdot 3^4}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2}} = \dfrac{4}{7}\sqrt{6}$

1.60 a $\dfrac{\sqrt[4]{x^3y^2z}}{\sqrt[4]{x^7yz^5}} = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{xz} = \dfrac{1}{xz}\sqrt[4]{y}$

b $\dfrac{\sqrt{a^5b^3}}{\sqrt{a^3b}} = \dfrac{a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}} = ab$

c $\dfrac{\sqrt[7]{p^9q^5}}{\sqrt[7]{p^2q^{-9}}} = \dfrac{p^{\frac{9}{7}}q^{\frac{5}{7}}}{p^{\frac{2}{7}}q^{-\frac{9}{7}}} = pq^2$

d $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5}{2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{5^{\frac{1}{2}}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

e $\dfrac{7}{3\sqrt{7}} = \dfrac{7}{3 \cdot 7^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{7^{\frac{1}{2}}}{3} = \dfrac{1}{3}\sqrt{7}$

f $\dfrac{6}{4\sqrt{6}} \cdot \dfrac{3}{5\sqrt{3}} = \dfrac{6}{4 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{3}{5 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{20}\sqrt{18}$

Opdrachten

11 a $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[5]{7}$ {De grondtallen en exponenten van de oneigenlijke machten zijn verschillend.}

b $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{36}} = \dfrac{6^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{2}{3}}} = 6^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{6}}$

c $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{9}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{9}}$ {De grondtallen en exponenten van de oneigenlijke machten zijn verschillend.}

d $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

e $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a-3)^2}$
$= a - 3$ als $a \geqq 3$
$= 3 - a$ als $a < 3$

12 a $\dfrac{a^2}{b} \geqq 0$. Omdat $a^2 \geqq 0$, moet $b > 0$ zijn. Dan bestaat dus $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$.

b $\sqrt{a^2} = a$ als $a \geqq 0$

13 a $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[8]{7} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{8}} = 7^{\frac{11}{24}} = \sqrt[24]{7^{11}}$

b $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[8]{5^5} = 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{8}} = 5^{\frac{31}{24}} = 5 \cdot 5^{\frac{7}{24}} = 5 \cdot \sqrt[24]{5^7}$

Vraagstukken

1.61 a $\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

b $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[4]{7^2}} = \dfrac{7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 1$

c $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}} = \dfrac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{6}}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt{5}$

1.62 a $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(x-5)^2} = x - 5$, als $x \geq 5$; de uitkomst is $5 - x$ als $x < 5$.

b $\sqrt{y^2 + 8y + 16} = \sqrt{(y+4)^2} = y + 4$, als $y \geq -4$; de uitkomst is $-y - 4$ als $y < -4$.

c $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^4}} = \dfrac{a}{b^2}$, als $a \geq 0$; de uitkomst is $-\dfrac{a}{b^2}$, als a < 0.

d $\sqrt{\dfrac{x^4y^8}{z^{12}}} = \dfrac{xy^2}{z^3}$, als $\dfrac{x}{z} \geq 0$; de uitkomst is $-\dfrac{xy^2}{z^3}$, als $\dfrac{x}{z} < 0$.

1.63 a $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[5]{a^4}} = \dfrac{\sqrt[15]{a^{35}}}{\sqrt[15]{a^{12}}} = \sqrt[15]{a^{23}} = a\sqrt[15]{a^8}$

b $\sqrt[3]{a^{11}b^{13}c} \cdot \sqrt[7]{a^5b^6c^4} = a^{\frac{11}{3}} b^{\frac{13}{8}} c^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{5}{7}} b^{\frac{6}{7}} c^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{93}{21}} b^{\frac{109}{21}} c^{\frac{19}{21}} = a^4b^5c\,\sqrt[21]{a^3b^4c^{19}}$

1.64 a $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[4]{x^2y^4} = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{4}} y^1 = x^{\frac{7}{6}} y^{1\frac{2}{6}} = xy\sqrt[6]{xy^2}$

b $\sqrt{ab^5c} \cdot \sqrt[3]{a^2b^{1,5}c^{2,5}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{5}{2}} c^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1,5}{3}} c^{\frac{2,5}{3}} = a^{\frac{7}{6}} b^3 c^{\frac{8}{6}} = ab^3c\sqrt[6]{ac^2}$

c $\sqrt[5]{pq^2} \cdot \sqrt[3]{p^3q^2} = pq\sqrt[15]{p^3q}$

d $\dfrac{3 \cdot 5}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

e $\dfrac{5 \cdot 15}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{4 \cdot 7}{\sqrt{7}} = 20\sqrt{105}$

f $\dfrac{4 \cdot 2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{\sqrt[4]{5}} = 4 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 6 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 24 \cdot (2^8 \cdot 5^9)^{\frac{1}{12}} = 24\sqrt[12]{500.000.000}$

Eindtoets

1 a $(a^3b^{-1}c^2)^{-1} \cdot (a^{-2}b^2c)^3 = a^{-3}bc^{-2} \cdot a^{-6}b^6c^3 = a^{-9}b^7c = \dfrac{b^7c}{a^9}$

b $\dfrac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot (10^{-2})^{\frac{1}{2}}}{6 \cdot (10^{-4} \cdot 10^2)^{-3}} = \dfrac{12 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-1}}{6 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-6}} = \dfrac{12 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^6} = \dfrac{2}{10^{15}}$

c $\dfrac{(2a^{-3}b^{-2}) \cdot (a^{-2}b^{0})^{-1}}{(a^{-1}bc^{0})^{-2}} = \dfrac{2a^{-3}b^{-2} \cdot a^{2}}{a^{2}b^{-2}} = \dfrac{2}{a^{3}}$

2 a $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

b $a \cdot \sqrt[5]{a} = a \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{1\frac{1}{5}}$

c $a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3} = a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{2\frac{3}{5}}$

d $\dfrac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} = a^{-2} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{-2\frac{1}{2}}$

e $\dfrac{1}{a \cdot \sqrt[4]{a}} \cdot \dfrac{1}{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^3}} = a^{-1} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{-5} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{-7}$

f $\dfrac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{b^{\frac{1}{12}}}{b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{b^{\frac{1}{12}}}{b^{\frac{11}{12}}} = b^{-\frac{5}{6}}$

3 a Eerst y herleiden: $y = 3^x - 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 3^{x-2} \cdot (3^2 - 3 - 2)$
$= 3^{x-2} \cdot 4 = 4 \cdot 3^{x-2}$

Als $x = 0$, dan $y = 4 \cdot 3^{-2} = \frac{4}{9}$.

b Als $x = 1$, dan $y = 4 \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3}$.

c Als $x = 2$, dan $y = 4 \cdot 3^{0} = 4$.
Natuurlijk hoeft de uitdrukking van y niet eerst herleid te worden en kan de waarde van x direct ingevuld worden. Het eerst herleiden is in dit geval efficiënter.

4 $\sqrt[3]{\dfrac{64a^{-18}b^2}{27(a^{-3}b^2c^0)^{-8}}} = \left(\dfrac{4^3a^{-18}b^2}{3^3(a^{24}b^{-16}c^0)}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{4^3b^{18}}{3^3a^{42}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{4b^6}{3a^{14}}$

5 20% van $5^{-40} = \frac{1}{5} \cdot 5^{-40} = 5^{-41} = \frac{1}{5^{41}}$

6 a $\sqrt[5]{25} \cdot \sqrt[5]{625} = 5\sqrt[5]{5}$

b $p^2 \cdot \sqrt{p} \cdot p^3 \cdot \sqrt{p} = p^6$

c $q^3 \cdot \sqrt[7]{q^2} \cdot q^2 \cdot \sqrt[7]{q^6} = q^6 \cdot \sqrt[7]{q}$

d $\dfrac{b^2 \cdot \sqrt[5]{b^4}}{b^3 \cdot \sqrt[5]{b^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{b}}{b}$

e $\dfrac{t^2 \cdot \sqrt[4]{t}}{t\sqrt{t}} \cdot \dfrac{t \cdot \sqrt[3]{t^2}}{t^5 \cdot \sqrt[12]{t^7}} = \dfrac{t^3 \cdot \sqrt[12]{t^{11}}}{t^6 \cdot \sqrt[12]{t^{13}}} = \dfrac{1}{t^3 \cdot \sqrt[12]{t^2}} = \dfrac{1}{t^3 \cdot \sqrt[6]{t}}$

7 a De bewering is niet juist: $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

b De bewering is niet juist: $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

c De bewering is juist: $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = 3 \cdot \sqrt[3]{6}$

d De bewering is juist: $\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[10]{3^3}} = \sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$

8

Planeet	Gemiddelde afstand tot de zon in AE	Gemiddelde afstand tot de zon in km	Gemiddelde km-afstand uitgedrukt in de wetenschappelijke notatie
Mercurius	0,39	0,39 · 149 597 870,66 km = 58 343 169,56	$5{,}83 \cdot 10^7$
Venus	0,72	107 710 466,88	$1{,}07 \cdot 10^8$
Aarde	1,00	149 597 870,66	$1{,}50 \cdot 10^8$
Mars	1,52	227 388 763,40	$2{,}27 \cdot 10^8$
Jupiter	5,20	777 908 927,43	$7{,}78 \cdot 10^8$
Saturnus	9,54	1 427 163 686,10	$1{,}42 \cdot 10^9$
Uranus	19,18	2 869 287 159,26	$2{,}87 \cdot 10^9$
Neptunus	30,06	4 496 911 992,04	$4{,}50 \cdot 10^9$
Pluto	29,44	4 404 161 312,23	$4{,}40 \cdot 10^9$

In de wetenschappelijke notatie is het decimale getal afgerond op twee cijfers achter de komma.

9 a $672 = 2^9 + 2^7 + 2^5 = 2^{2^3+1} + 2^{2^2+3} + 2^{2^2+1} = 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2^2+1}$

b $488 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^{2+1}$

c $1\,274 = 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 =$
$2^{2^3+2} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2 + 2^{2+1} +$
$2^{2^{2+1}+2} + 2^{2+2+1} + 2^{2^2+1} + 2^2 + 2^{2+1} + 2$

d $2\,189 = 2^{11} + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 2^{2^3+2+1} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2+1} + 2^2 + 2^0 =$
$2^{2^{2+1}+2+1} + 2^{2^2+2+1} + 2^{2+1} + 2^2 + 2^0$

e $10\,086 = 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2 =$
$2^{2^3 +}\,2^{2+1} + 2^{2^3+2} + 2^{2^3+1} + 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2 + 2 =$
$2^{2^{2+1}+2^2+1} + 2^{2^{2+1}+2} + 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2 + 2$

10 We gaan ervan uit dat de lengte, breedte en hoogte van de kubus r dm is. De inhoud van de kubus is gelijk aan r^3 dm^3. De oppervlakte van de kubus is gelijk aan $6r^2$ dm^3. Het gewicht G van de kubus is gelijk aan inhoud · soortelijke massa = $0{,}3r^3$ kg.

a De Meeh-coëfficiënt c is gelijk aan $\dfrac{H}{G^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{6r^2}{(0{,}3r^3)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{20}{r} \approx 13{,}4$.

b De oppervlakte H blijft $6r^2$. Het gewicht G wordt $7{,}9r^3$. De Meeh-coëfficiënt c is in dit geval gelijk aan

$$\frac{H}{G^{\frac{2}{3}}} = \frac{6r^2}{(7{,}9r^3)^{\frac{2}{3}}} \approx 1{,}5.$$

c Middels natuurkundeboeken vinden we de soortelijke massa van eikenhout $\rho = 0{,}95$. De Meeh-coëfficiënt c van een eikenhouten bol is dan gelijk aan

$$\frac{H}{G^{\frac{2}{3}}} = \frac{4\pi r^2}{\left(0{,}95 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\right)^{\frac{2}{3}}} \approx 5{,}0.$$

d Inhoud cilinder is r^2h en oppervlakte cilinder is $2\pi rh + 2\pi r^2$. In het geval van een lange smalle eikenhouten cilinder met straal r_s en hoogte h_l is de

Meeh-coëfficiënt c gelijk aan $\dfrac{H}{G^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2\pi r_s h_l + 2\pi r_s^2}{(\rho\pi r_s^2 h_l)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2\pi^{\frac{1}{3}} \cdot (h_l + r_s)}{r_s^{\frac{1}{3}} \cdot (\rho h_l)^{\frac{2}{3}}}$.

Van een korte dikke eikenhouten cilinder is de straal r_d en hoogte h_k. In dit

geval is de Meeh-coëfficiënt c gelijk aan $\dfrac{2\pi^{\frac{1}{3}} \cdot (h_k + r_d)}{r_d^{\frac{1}{3}} \cdot (\rho h_k)^{\frac{2}{3}}}$.

Het vergelijken van de Meeh-coëfficiënt van beide cilinders komt neer op

het vergelijken van de waarden $\dfrac{(h_l + r_s)}{r_s^{\frac{1}{3}} \cdot (\rho h_l)^{\frac{2}{3}}}$ en $\dfrac{(h_k + r_d)}{r_d^{\frac{1}{3}} \cdot (\rho h_k)^{\frac{2}{3}}}$ en is erg lastig.

e De Meeh-coëfficiënt van een kubus, bol en cilinder is respectievelijk gelijk aan:

$\dfrac{6}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\dfrac{4{,}8}{\rho^{\frac{2}{3}}}$ en $\dfrac{2\pi^{\frac{1}{3}} \cdot (h + r)}{r^{\frac{1}{3}} \cdot (\rho h)^{\frac{2}{3}}}$. Hieruit blijkt dat de Meeh-coëfficiënt van een

bol kleiner is dan die van een kubus. De vergelijking met een cilinder is een stuk lastiger.

Een vergelijking met betrekking tot lang, kort of smal, dik is minder zinvol bij het vergelijken van kubus, bol en cilinder.

Leereenheid 1.4

Werken met logaritmen

Diagnostische toets

1 a $^{16}\log 2 = x \Leftrightarrow 16^x = 2 \Leftrightarrow (2^4)^x = 2 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^1 \Leftrightarrow$
$4x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

b $^{8}\log 4 = x \Leftrightarrow 8^x = 4 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

c $^{2}\log \sqrt[3]{4} = x \Leftrightarrow 2^x = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

d $2 + {}^{2}\log 4 = x \Leftrightarrow {}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 4 = x \Leftrightarrow {}^{2}\log 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16$
$\Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

2 $^{3}\log 7 = \dfrac{^{7}\log 7}{^{7}\log 3} = \dfrac{1}{^{7}\log 3}$. De bewering is juist.

3 a Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

$^{2}\log 3 = {}^{8}\log x \Leftrightarrow {}^{2}\log 3 = \dfrac{^{2}\log x}{^{2}\log 8} \Leftrightarrow {}^{2}\log 3 = \dfrac{^{2}\log x}{3}$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x = 3 \cdot {}^{2}\log 3 \Leftrightarrow {}^{2}\log x = {}^{2}\log 27 \Leftrightarrow x = 27$

b Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

$$\frac{{}^3\log 9x}{{}^3\log x} = {}^3\log 9 \Leftrightarrow \frac{{}^3\log 9x}{{}^3\log x} = 2 \Leftrightarrow {}^3\log 9x = 2 \cdot {}^3\log x$$

$\Leftrightarrow 9x = x^2 \Leftrightarrow x = 9$ of $x = 0$(v.n.)

c Bestaansvoorwaarde: $-4 < x < 2$

$$^{\frac{1}{2}}\log \frac{2-x}{x+4} = 2 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x + 4 = 8 - 4x$$

$\Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

d Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

$${}^2\log x + {}^4\log x = 1 \Leftrightarrow {}^2\log x + \frac{{}^2\log x}{{}^2\log 4} = 1$$

$$\Leftrightarrow {}^2\log x + \tfrac{1}{2} \cdot {}^2\log x = 1 \Leftrightarrow {}^2\log x^{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2}{3}}$$

4 $${}^3\log a + \tfrac{1}{2} \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log b = {}^3\log a + \tfrac{1}{2} \cdot {}^3\log \frac{1}{b}$$

$$= {}^3\log a + {}^3\log \frac{1}{\sqrt{b}} = {}^3\log \frac{a}{\sqrt{b}}$$

De bewering is juist.

5 ${}^8\log 16 + {}^8\log 4 = {}^8\log 64 = 2$. De bewering is juist.

6 Bestaansvoorwaarde: $x > 1$

$${}^{3^{-2}}\log(x-1) = {}^3\log(x-1)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{{}^3\log(x-1)}{{}^3\log 3^{-2}} = {}^3\log(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{{}^3\log(x-1)}{-2} = {}^3\log(x-1)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow {}^3\log(x-1)^{-\frac{1}{2}} = {}^3\log(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Dit is juist voor elke x die voldoet aan de bestaansvoorwaarde, dus de bewering is juist.

1.4.1 Definitie van logaritme

Opdrachten

1 a ${}^4\log 64 = x \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$

b ${}^{10}\log 10 = x \Leftrightarrow 10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$

c ${}^3\log 1 = 0$

d ${}^9\log \frac{1}{3} = x \Leftrightarrow 9^x = 3^{-1} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

e ${}^{10}\log 0{,}1 = -1$

f ${}^2\log 4 = x \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

g ${}^3\log \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h $^{5}\log 125 = x \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$

i $^{4}\log \frac{1}{4} = x \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

j 1

Vraagstukken

1.65 a $^{2}\log 16 = 4$

b $^{2}\log \frac{1}{2} = -1$

c $^{10}\log 1\,000\,000 = 6$

d $^{5}\log \frac{1}{125} = -3$

e $^{4}\log (64)^{-1} = -3$

f $^{3}\log \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

g $^{7}\log 1 = 0$

h $^{7}\log 7 = 1$

i $^{7}\log \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

1.66 a $^{\frac{1}{4}}\log 4 = -1$

b $^{\frac{1}{\pi}}\log \pi^2 = -2$

c $^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{8} = 3$

d $^{\frac{1}{8}}\log \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

e $^{64}\log \frac{1}{16} = x \Leftrightarrow 4^{3x} = 4^{-2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

f $^{81}\log 9 = \frac{1}{2}$

1.67 a $^{4}\log a = -1 \Leftrightarrow a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

b $^{4}\log a = -2 \Leftrightarrow a = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

c $^{2}\log a = 10 \Leftrightarrow a = 2^{10} = 1\,024$

d $^{4}\log a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

e $^{3}\log a = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3}{3}$

f $^{-3}\log a = 2$ is niet gedefinieerd.

1.68 a $^{g}\log 5 = 1 \Leftrightarrow g^1 = 5 \Leftrightarrow g = 5$

b $^{g}\log 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow g^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow g = 2^3 = 8$

c $^{g}\log \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow g^{-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow g^{-2} = 2^{-2} \Leftrightarrow g = 2$

d ${}^{g}\log -\frac{1}{8} = 3$ is niet gedefinieerd.

e ${}^{g}\log \frac{1}{100} = -2 \Leftrightarrow g^{-2} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow g^{-2} = 10^{-2} \Leftrightarrow g = 10$

f ${}^{g}\log 3\sqrt{3} = 1\frac{1}{2} \Leftrightarrow g^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow g^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow g = 3$

1.69 a $\log 2 = 0{,}3010$

b $\log 3 = 0{,}4771$

c $\log 10 = 1$

d $\log 10\,000 = 4$

1.70 a $L_A = 70 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_A}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{I_A}{10^{-12}}\right) = 7 \Rightarrow \frac{I_A}{10^{-12}} = 10^7$

$\Rightarrow I_A = 10^{-5}\ \text{W/m}^2$

$L_B = 80 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_B}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{I_B}{10^{-12}}\right) = 8 \Rightarrow \frac{I_B}{10^{-12}} = 10^8$

$\Rightarrow I_B = 10^{-4}\ \text{W/m}$

b $I_{A+B} = 10^{-5} + 10^{-4} = 0{,}00011\ \text{W/m}^2$

c $L_{A+B} = 10 \cdot \log\left(\frac{0{,}00011}{10^{-12}}\right) = 80{,}4\ \text{dB}$

1.4.2 Eigenschappen van logaritmen

Opdrachten

2 a ${}^{3}\log 3 + {}^{3}\log 9 = {}^{3}\log 27$

b ${}^{5}\log 10 + {}^{5}\log 20 = {}^{5}\log 200$

c $3 + {}^{2}\log 16 = {}^{2}\log 8 + {}^{2}\log 16 = {}^{2}\log 128$

3 a ${}^{2}\log 2 - {}^{2}\log 64 = {}^{2}\log \frac{2}{64} = {}^{2}\log \frac{1}{32}$

b ${}^{3}\log 9 - {}^{3}\log \sqrt{3} = {}^{3}\log \frac{9}{\sqrt{3}}$

c ${}^{2}\log 8 - 1 = {}^{2}\log 8 - {}^{2}\log 2 = {}^{2}\log 4$

d $4 - {}^{2}\log 4 = {}^{2}\log 16 - {}^{2}\log 4 = {}^{2}\log 4$

4 a ${}^{7}\log 3 = \frac{{}^{2}\log 3}{{}^{2}\log 7}$

b ${}^{3}\log 2 = \frac{{}^{2}\log 2}{{}^{2}\log 3} = \frac{1}{{}^{2}\log 3}$

c ${}^{5}\log 7 = \frac{{}^{2}\log 7}{{}^{2}\log 5}$

d $^{4}\log 5 = \dfrac{^{2}\log 5}{^{2}\log 4} = \dfrac{^{2}\log 5}{2}$

Vraagstukken

1.71 **a** $\log b^2d^2 = 2 \log b + 2 \log d$

b $\log \dfrac{ac}{d^2} = \log a + \log c - 2 \log d$

c $\log \dfrac{a^3}{b^3} = 3 \log a - 3 \log b$

d $\log \sqrt[3]{a^2b} = \frac{2}{3} \log a + \frac{1}{3} \log b$

e $\log \dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[5]{a}} = \frac{3}{4} \log a - \frac{1}{5} \log a = \frac{11}{20} \log a$

f $\log \left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log c$

g $\log \left(\dfrac{a^2}{c}\right)^3 = 6 \log a - 3 \log c$

1.72 **a** $^{5}\log 3 = 0{,}6826$

b $^{7}\log 2 = 0{,}3562$

c $^{3}\log 51 = 3{,}5789$

d $^{8}\log \pi = 0{,}5505$

e $^{2}\log 85 = 2{,}4094$

f $^{7}\log \sqrt{29} = 0{,}8652$

1.4.3 Oplossen van logaritmische vergelijkingen

Opdrachten

5 **a** $^{2}\log x = {}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 7 \Leftrightarrow {}^{2}\log x = {}^{2}\log 21 \Leftrightarrow x = 21$

b $^{4}\log (2x + 1) = {}^{4}\log x + {}^{4}\log 3 \Leftrightarrow {}^{4}\log (2x + 1) = {}^{4}\log 3x$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3x \Leftrightarrow x = 1$

6 **a** Bestaansvoorwaarde: $x > 0$
$^{4}\log x = 3 + {}^{4}\log 2 \Leftrightarrow {}^{4}\log x = {}^{4}\log 64 + {}^{4}\log 2$
$\Leftrightarrow {}^{4}\log x = {}^{4}\log 128 \Leftrightarrow x = 128$

b Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

$^{2}\log x = {}^{4}\log 2x \Leftrightarrow {}^{2}\log x = \dfrac{^{2}\log 2x}{^{2}\log 4}$ en $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x = \dfrac{^{2}\log 2x}{2}$ en $x > 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot {}^{2}\log x = {}^{2}\log 2x$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow {}^{2}\log x^2 = {}^{2}\log 2x$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 2x$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$ en $x > 0$

$\Leftrightarrow x(x-2)=0 \quad$ en $\quad x>0$
$\Leftrightarrow x=0$ of $x=2 \quad$ en $\quad x>0$
$\Rightarrow x=2$

Vraagstukken **1.73** **a** $\log x=\log 4 \Leftrightarrow x=4$

b $\log x=2\log 2 \Leftrightarrow \log x=\log 4 \Leftrightarrow x=4$

c $\log x=3\log a+2\log b \Leftrightarrow \log x=\log a^3b^2 \Leftrightarrow x=a^3b^2$

d $\log x=4\log a-2\log b \Leftrightarrow \log x=\dfrac{a^4}{b^2} \Leftrightarrow x=\dfrac{a^4}{b^2}$

e $\log x=2\log a+\log b+\log c-\log d$
$\Leftrightarrow \log x=\log\dfrac{a^2bc}{d} \Leftrightarrow x=\dfrac{a^2bc}{d}$

f $\log x=-\log a+\log b-(\log c+\log d)$
$\Leftrightarrow \log x=\log\dfrac{b}{acd} \Leftrightarrow x=\dfrac{b}{acd}$

g $\log(3x+2)=\log 3+2\log 2 \Leftrightarrow \log(3x+2)=\log 12$
$\Leftrightarrow 3x+2=12 \Leftrightarrow x=3\frac{1}{3}$

h $\log 3x+2=\log 3+2\log 2 \Leftrightarrow \log 3x+\log 100=\log 12$
$\Leftrightarrow 300x=12 \Leftrightarrow x=\frac{12}{300}=\frac{1}{25}$

i ${}^2\log x=1 \Leftrightarrow x=2$

j ${}^2\log x=1-{}^2\log 5 \Leftrightarrow {}^2\log x={}^2\log 2-{}^2\log 5$
$\Leftrightarrow {}^2\log x={}^2\log\frac{2}{5} \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$

1.74 **a** Uit $3x+1>0$ en $2x-1>0$ volgt als bestaansvoorwaarde: $x>\frac{1}{2}$
${}^2\log(3x+1)+{}^2\log(2x-1)={}^2\log 20-{}^2\log 5$
$\Leftrightarrow {}^2\log(6x^2-x-1)={}^2\log 4$
$\Leftrightarrow 6x^2-x-1=4 \quad$ en $x>\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 6x^2-x-5=0 \quad$ en $x>\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{6}$ of $x=1 \quad$ en $x>\frac{1}{2}$
$\Rightarrow x=1$

b Uit $2-x>0$ en $3+2x>0$ volgt als bestaansvoorwaarde: $-\frac{3}{2}<x<2$
${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x)+{}^{\frac{1}{2}}\log(3+2x)={}^{\frac{1}{2}}\log 1$
$\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log(-2x^2+x+6)={}^{\frac{1}{2}}\log 1$
$\Leftrightarrow -2x^2+x+6=1$en $-\frac{3}{2}<x<2$
$\Leftrightarrow 2x^2-x-5=0 \quad$ en $-\frac{3}{2}<x<2$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}\approx 1{,}85$ of $x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}\approx -1{,}35$

c Uit $2x+1>0$ en $\frac{1}{2}x^2-4>0$ volgt: $x>-\frac{1}{2}$ en $x^2-8>0$
De ongelijkheid $x^2-8>0$ levert m.b.v. het tekenoverzicht

+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
			$-2\sqrt{2}$				$2\sqrt{2}$			

$x < -2\sqrt{2}$ of $x < 2\sqrt{2}$

Uit $x > -\frac{1}{2}$ en ($x < -2\sqrt{2}$ of $x > 2\sqrt{2}$) vinden we als bestaansvoorwaarde: $x > 2\sqrt{2}$

$^2\log(2x+1) = 1 + {}^2\log(\frac{1}{2}x^2 - 4)$

$\Leftrightarrow {}^2\log(2x+1) = {}^2\log(x^2 - 8)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 9 = 0 \quad$ en $x > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = -2{,}162$ of $x = 4{,}162$ en $x > 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = 4{,}162$

d Bestaansvoorwaarde: $x > \frac{7}{4}$

$$^2\log(x-1) = {}^4\log(4x-7) \Leftrightarrow {}^2\log(x-1) = \frac{^2\log(4x-7)}{^2\log 4}$$

$$\Leftrightarrow {}^2\log(x-1) = \frac{^2\log(4x-7)}{2}$$

$\Leftrightarrow 2 \cdot {}^2\log(x-1) = {}^2\log(4x-7)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4x - 7$ en $x > \frac{7}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \quad$ en $x > \frac{7}{4}$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = 4 \quad$ en $x > \frac{7}{4}$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = 4$

e Bestaansvoorwaarde: $-1 < x < 3$

$$^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{3-x}{x+1}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x+1} = \frac{1}{27} \text{ en } -1 < x < 3$$

$\Leftrightarrow 81 - 27x = x + 1 \quad$ en $-1 < x < 3$

$\Leftrightarrow 28x = 80 \quad$ en $-1 < x < 3$

$$\Leftrightarrow x = \frac{80}{28} = \frac{20}{7} = 2\tfrac{6}{7}$$

1.75 a $\log 3x = 6 \Leftrightarrow 3x = 10^6 \Leftrightarrow x = 333\,333\frac{1}{3}$

b $2\log x + 4\log y = 0 \Leftrightarrow \log x^2 + \log y^4 = 0 \Leftrightarrow \log x^2y^4 = \log 1$

$$\Leftrightarrow x^2y^4 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y^4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{y^2}$$

c $3 \log x + 2 \log 3x = 3$
$\Leftrightarrow \log x^3 + \log 9x^2 = 3$
$\Leftrightarrow \log 9x^5 = 3$
$\Leftrightarrow 9x^5 = 10^3$
$\Leftrightarrow x^5 = \dfrac{10^3}{9}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\dfrac{10^3}{9}} \approx 2{,}56$

d De bestaansvoorwaarde volgt uit:
$x^2 - 2x + 1 > 0$ en $x + 1 > 0$
$\Leftrightarrow x > -1$
${}^2\log (x^2 - 2x + 1) + {}^2\log (x + 1) = {}^2\log 16$
$\Leftrightarrow {}^2\log (x^2 - 2x + 1)(x + 1) = {}^2\log 16$
$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x + 1) = 16$
$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 16$
$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 15 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x^2 + 2x + 5) = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$

Eindtoets

1 a ${}^8\log 16 = \frac{4}{3}$

b ${}^2\log 64 = 6$

c ${}^3\log \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$

d $3 - {}^2\log 8 = 0$

2 De bewering is juist.

3 a ${}^3\log 2 = {}^9\log x \Leftrightarrow x = 4$

b $\dfrac{{}^3\log 9x}{{}^3\log x} = {}^{\frac{1}{3}}\log 9 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log \dfrac{2 + x}{x - 4} = 2 \Leftrightarrow x = -4$

d ${}^3\log x - {}^9\log x = 2 \Leftrightarrow x = 81$

4 De bewering is juist.

5 De bewering is niet juist.

6 De bewering is juist.

Leereenheid 1.5

Rekenen met goniometrische verhoudingen

Diagnostische toets

1 a α in $[\pi;1\frac{1}{2}\pi\rangle$ of in $[1\frac{1}{2}\pi;2\pi]$

We vinden $\alpha_1 = -34{,}85°$ of $325{,}15°$ in $[1\frac{1}{2}\pi;2\pi]$.

Hieruit vinden we $\alpha_2 = 214{,}85°$ in $[\pi;1\frac{1}{2}\pi\rangle$.

$325{,}15° = 5{,}67$ rad en $214{,}85° = 3{,}75$ rad

b Omdat geldt $-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$, heeft α geen oplossing.

c α in $[\frac{1}{2}\pi;\pi\rangle$ of in $[1\frac{1}{2}\pi;2\pi]$

We vinden $\alpha_1 = -79{,}99°$ of $280{,}01°$ in $[1\frac{1}{2}\pi;2\pi\rangle$.

Hieruit vinden we $\alpha_2 = 100{,}01°$ in $[\frac{1}{2}\pi;\pi\rangle$.

$280{,}01° = 4{,}89$ rad en $100{,}01° = 1{,}75$ rad

d α in $[0;\frac{1}{2}\pi\rangle$ of in $[\frac{1}{2}\pi;\pi\rangle$

We vinden $\alpha_1 = 53{,}13°$ in $[0;\frac{1}{2}\pi\rangle$

Hieruit vinden we $\alpha_2 = 126{,}87°$ in $[\frac{1}{2}\pi;\pi\rangle$.

$53{,}13° = 0{,}93$ rad en $126{,}87° = 2{,}21$ rad

2 Zie fig. 1.5.

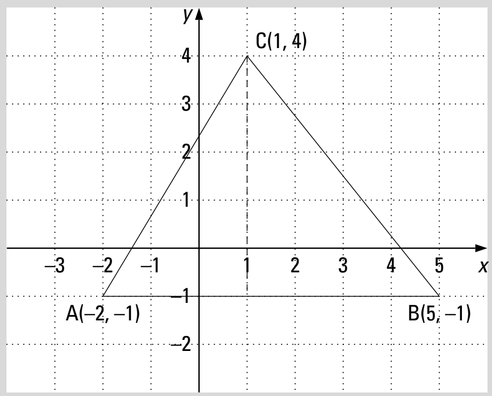
a $\sin \angle A = -\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ kan niet.

b $\tan \angle A = \frac{5}{3}$ en niet $\frac{3}{5}$.

c $\tan \angle A = -\frac{3}{5}$ kan niet.

d $\sin \angle A = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$ is juist.

Figuur 1.5



3 a $-70° = \dfrac{-70}{360} \cdot 2\pi \approx -1{,}222$ rad

b $125° \approx 2{,}182$ rad

c $-275° \approx -4{,}800$ rad

d $3\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \dfrac{3\frac{1}{6}\pi}{2\pi} \cdot 360° = 570°$

e $-0{,}85 \text{ rad} \approx -48{,}70°$

f $6\frac{1}{3}\pi \text{ rad} \approx 1140°$

4 a $\cos 64° = \sin 26°$

b $\sin 212° = \cos 122°$

c $\cos 121° = -\sin 31°$

d $\sin 317° = -\cos 47°$

5 a $\sin 165°$
$$= \sin(135° + 30°)$$
$$= \sin 135° \cdot \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos 135°$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \cdot -(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

b $\cos 255°$
$$= \cos(225° + 30°)$$
$$= \cos 225° \cdot \cos 30° - \sin 225° \cdot \sin 30°$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

c $\sin(-285°) = \sin 75° = \sin(30° + 45°)$
$= \sin 30° \cdot \cos 45° + \sin 45° \cdot \cos 30°$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

d $\tan 285° = \tan(240° + 45°) = \dfrac{\sin(240° + 45°)}{\cos(240° + 45°)}$

$$= \frac{\sin 240° \cdot \cos 45° + \sin 45° \cdot \cos 240°}{\cos 240° \cdot \cos 45° - \sin 240° \cdot \sin 45°}$$

$$= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

6 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \approx 25 + 36 - 60 \cdot 0{,}342 = 40{,}48$
$a = \sqrt{40{,}48} \approx 6{,}36$
Er geldt nu: $\dfrac{6{,}36}{\sin 70°} = \dfrac{5}{\sin\beta} \Rightarrow 5 \cdot \sin 70° = 6{,}36 \sin\beta$
$\sin\beta = 0{,}7388 \Rightarrow \beta = 47{,}63° = 0{,}83$ rad

7 $\angle C$ bestaat uit $\angle C_1$ en $\angle C_2$
$\cos\angle C = \cos(\angle C_1 + \angle C_2)$
$= \cos\angle C_1 \cdot \cos\angle C_2 - \sin\angle C_1 \cdot \sin\angle C_2$
$= \dfrac{5}{\sqrt{34}} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{41}} - \dfrac{3}{\sqrt{34}} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{41}} = \dfrac{13}{\sqrt{1\,394}}$

8 a $\cos 4t = \cos^2 2t - \sin^2 2t = (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 - (2\sin t \cdot \cos t)^2$

$$= \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right)^2 - \left(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = -\frac{527}{625}$$

b $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$

c $\sin 4t = 2\sin 2t \cdot \cos 2t = 2 \cdot \dfrac{24}{25} \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t)$

$$= 2 \cdot \frac{24}{25} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = \frac{48}{25} \cdot \left(\frac{9}{25} - \frac{16}{25}\right) = -\frac{336}{625}$$

d $\sin t = \dfrac{4}{3}$ kan niet.
Antwoord **c** is juist.

1.5.1 Basisbegrippen uit de goniometrie en de eenheidscirkel

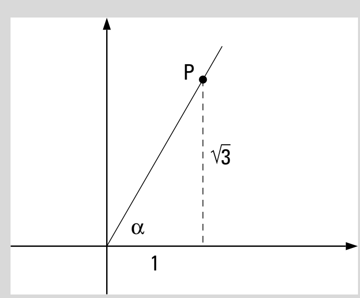
Opdrachten

1 Zie fig. 1.6.
$\tan\alpha = \sqrt{3}; \alpha = 60°$

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \alpha = 60°$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}; \alpha = 60°$

Figuur 1.6



2 a Positief: $\sin 150° = 0{,}5$.
b Negatief: $\cos 200° = -0{,}940$.
c Negatief: $\tan 310° = -1{,}192$.
d Negatief: $\sin(-100°) = -0{,}985$.

3 Zie fig. 1.7.

$\angle \text{DOC} = \dfrac{360°}{5} = 72°$

Dus $\angle \text{XOC} = 90° - 72° = 18°$

$\sin 18° = 0{,}309 = \dfrac{y_C}{5} \Rightarrow$

$y_C = 5 \cdot 0{,}309 = 1{,}545$

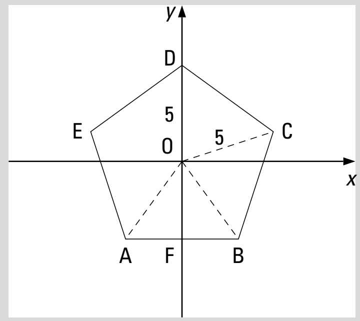
$\cos 18° = 0{,}951 = \dfrac{x_C}{5} \Rightarrow$

$x_C = 5 \cdot 0{,}951 = 4{,}755$

C = (4,755;1,545); D = (0,5);

E = (−4,755;1,545).

Figuur 1.7



Nu nog B en A. $\angle$ BOC = 72°, dus $\angle$ BOX = 72° − 18° = 54°:

$\sin 54° = 0{,}809 = \dfrac{y_B}{5} \Rightarrow y_B = 4{,}045$

$\cos 54° = 0{,}588 = \dfrac{x_B}{5} \Rightarrow x_B = 2{,}940$

B = (2,940; −4,045) en A = (−2,940; −4,045).

Vraagstukken **1.76**

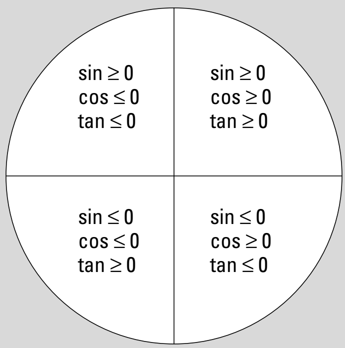
	30°	45°	60°	90°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	Bestaat niet

	120°	135°	150°	180°
Sin	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	–1
Tan	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

	210°	225°	240°	270°
Sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	–1
Cos	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Tan	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Bestaat niet

	300°	315°	330°	360°
Sin	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Tan	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Figuur 1.8



1.77 Uit de tabel van het voorgaande vraagstuk blijkt dat de coördinaten van D zijn $\left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, die van E zijn $\left(-3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Verder geldt A = $\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en B = $\left(3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Voor de punten C en F geldt C = (7,0) en F = (−7,0).

1.78 De gevraagde hoek is de hoek ingesloten tussen AH en de horizontale lijn. Voor de hoek AHP geldt

$\cos(\angle AHP) = \dfrac{100}{115{,}5} = 0{,}866$. ∠ AHP = 30,0°

1.79 a Sin (72°) = 0,9511 = $\dfrac{CD}{7}$. Dan is CD = 7 · 0,9511 = 6,66.

b Voor ∠B geldt sin (∠B) = $\dfrac{6{,}66}{16}$ = 0,41625. Dan is ∠B = 24,6°.

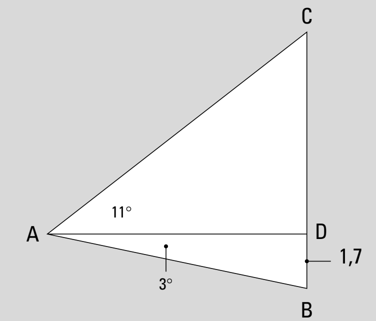
c AB = AD + BD; $AD^2 = 7^2 - CD^2 = 49 - 6{,}66^2 = 4{,}6444$; AD = 2,155…, evenzo $BD^2 = 16^2 - CD^2$, enz, … ; BD = 14,548; AB = 16.703…

1.80 a Voor $\angle P_1$ geldt $\sin(\angle P_1) = \dfrac{5}{14} = 0{,}3571$. Dan is $\angle P_1 = 20{,}9°$.

b Voor $\angle P_2$ geldt $\cos(\angle P_2) = \dfrac{14}{23} = 0{,}6087$. Dan is $P_2 = 52{,}5°$.

c Voor $\angle P_3$ geldt $\sin(\angle P_3) = \dfrac{19}{23} = 0{,}8261$. Dan is $\angle P_2 = 55{,}7°$.

1.81 a De situatie is hiernaast schematisch weergegeven. De lengte van de boom wordt voorgesteld door de lengte van BC. BC = BD + DC = 1,7 + DC. We berekenen DC.
Via tan (3°) berekenen we AD en via tan (11°) kunnen we dan DC bepalen.

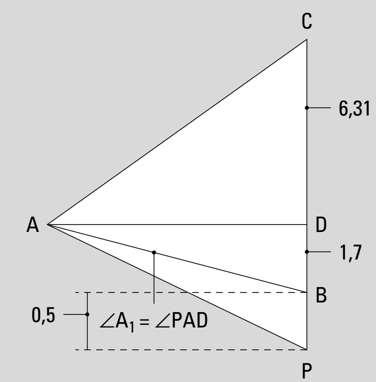


$\text{Tan}(3°) = 0{,}0524 = \dfrac{1{,}7}{AD}$. Dus
AD = 32,44.

$\text{Tan}(11°) = 0{,}1944 = \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{DC}{32{,}44}$.

Dus DC = 6,31.
BC= 1,7 + 6,31 = 8,01 meter.

b De situatie uit b is hiernaast schematisch weergegeven. De boom wordt voorgesteld door lijnstuk PC. Gevraagd wordt $\angle A_1$, de hoek ingesloten door AP en AD.
Voor deze hoek geldt



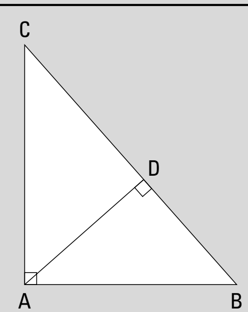
$\tan(\angle A_1) = \dfrac{2{,}2}{32{,}44} = 0{,}0678$.

Dus $A_1 = 3{,}9°$.

c De gevraagde hoek tussen AC en AD noemen we $\angle A_2$; $\tan(\angle A_2) = 5{,}81/32{,}44 = 0{,}1790\ldots$;
$A_2 = 10{,}154°$.

1.82 Zie fig. 1.9.

Figuur 1.9



a AC = 3 en BC = 4;

$\sin \angle ABD = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{4}$

b AB = 2 en AC = 7;

$\cos \angle ABD = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{?}$

$BC = \sqrt{53}$, dus

$\cos \angle ABD = \dfrac{2}{\sqrt{53}} \approx 0{,}275$

c AB = 9 en AD = 4;

$\tan \angle ABD = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{4}{?}$

$BD = \sqrt{65}$, dus$\tan \angle ABD = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \approx 0{,}496$

d AB = 7 en BC = 12; $\angle DAB = ?$

$\angle DAB = \angle ACB$

$\sin \angle ACB = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7}{12} \approx 0{,}583 \Rightarrow \angle ACB = \angle DAB = 35{,}66°$

e DB = 3 en AB = 5; $\angle$ ABD = ?

$\cos \angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \angle ABD = 53{,}13°$

1.83 Zie fig. 1.10.

a BD berekenen met tangens:

$\tan \angle ABC = \tan 35° = 0{,}700 = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{BD}$

$\Rightarrow BD = \frac{3}{0{,}700} = 4{,}286$

b $\angle$ BAC berekenen met $\angle$ DAC:

AD = 4,286 − 4 = 0,286

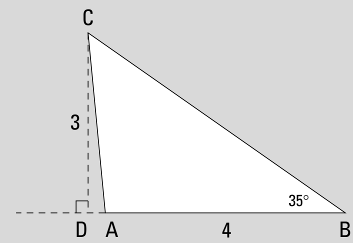
$\tan \angle DAC = \frac{3}{0{,}286} = 10{,}490 \Rightarrow$

$\angle DAC = 84{,}55°$

Dus $\angle BAC = 180° - 84{,}55° = 95{,}45°$

c $BC = \sqrt{3^2 + (4{,}286)^2} = 5{,}23$

Figuur 1.10



1.84 PHA = 90° − 25° = 65°.

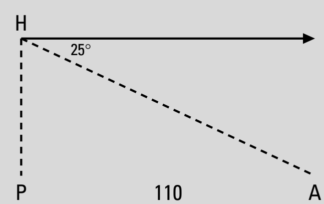
$\text{Tan } 25° = 0{,}466 = \frac{AP}{HP} = \frac{110}{HP}$.

Dus $HP = \frac{110}{0{,}466} = 236{,}05$ meter.

De afstand tussen helikopter en auto is de lengte van

$HA = \sqrt{110^2 + 236{,}05^2} =$

260,42 meter.



1.5.2 Het begrip radiaal en de grafieken van sin, cos en tan

Opdrachten **4 a** $\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{2\pi} \cdot 360° = 180°$

b $\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = \frac{\frac{1}{3}\pi}{2\pi} \cdot 360° = 60°$

c $\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = 120°$

d $\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = 30°$

e $1\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = 210°$

f $30° = \frac{30}{360} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}$

g $90° = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$

h $120° = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$

i $150° = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$

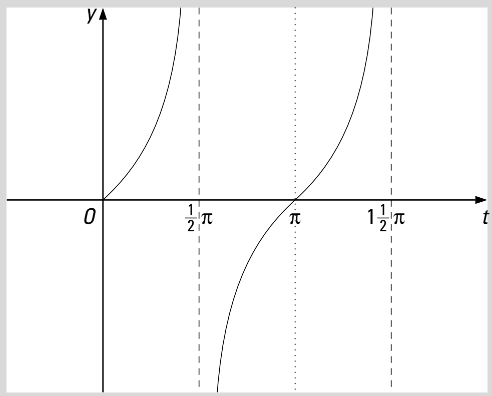
j $240° = 1\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$

5 a Zie tabel 1.1 en fig. 1.11.

Tabel 1.1 **Functiewaarden van tan *t* met *t* in radialen**

t	**0**	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$
tan *t*	0	0,58	1	1,73	–	–1,73	–1	–0,58	0	0,58	1	1,73	–

Figuur 1.11



b De functie is periodiek, met periode π.

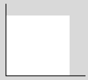
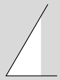
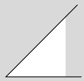
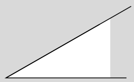
c De grafiek is puntsymmetrisch in $t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$, enz.

d Breuken als uitkomst, met in de noemer 0, treden op bij $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$, etc. De grafiek nadert de lijn $t = \frac{1}{2}\pi$ respectievelijk $t = 1\frac{1}{2}\pi$. Deze lijnen worden asymptoten genoemd.

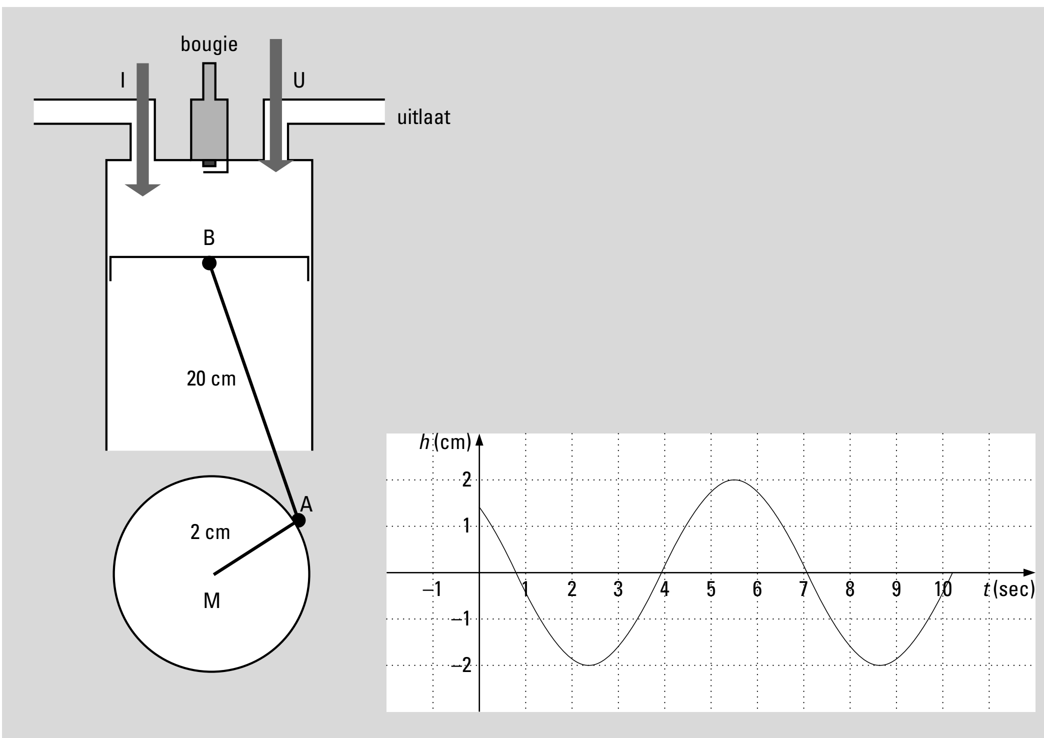
6

		sin	**cos**	**tan**
a	positief	$[0; \pi\rangle$	$[0; \frac{1}{2}\pi\rangle$ en $[1\frac{1}{2}\pi; 2\pi\rangle$	$[0; \frac{1}{2}\pi\rangle$ en $[\pi; 1\frac{1}{2}\pi\rangle$
	negatief	$[\pi; 2\pi\rangle$	$[\frac{1}{2}\pi; 1\frac{1}{2}\pi\rangle$	$\langle\frac{1}{2}\pi; \pi\rangle$ en $\langle 1\frac{1}{2}\pi; 2\pi]$
b	bereik	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\langle\leftarrow; \rightarrow\rangle$
c	domein	$[0; 2\pi]$	$[0; 2\pi]$	$[0; \frac{1}{2}\pi\rangle$ en $\langle\frac{1}{2}\pi; 1\frac{1}{2}\pi\rangle$ en $\langle 1\frac{1}{2}\pi; 2\pi]$

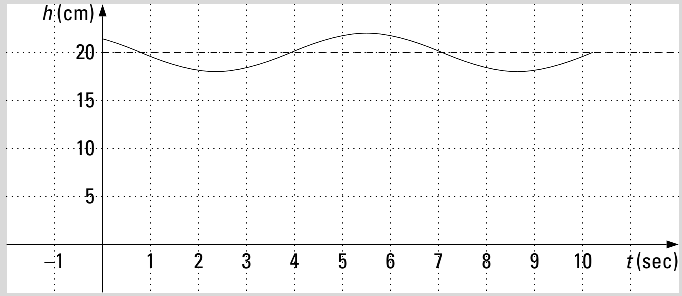
Vraagstukken **1.85**

Hoek	Graden	Radialen
	90°	$\frac{1}{2}\pi$
	60°	$\frac{1}{3}\pi$
	45°	$\frac{1}{4}\pi$
	30°	$\frac{1}{6}\pi$

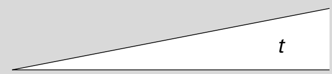
1.86 a



b De grafiek uit **a** is 20 cm naar boven verschoven!



1.87 a Er geldt tan (t) = 0,08.
Dus t = 0,0798 rad.



b Stel de afgelegde afstand is gelijk aan x. cos (0,0798) = 0,9968. Er geldt nu $0{,}9968 = \dfrac{150}{x}$.

Dus $x = \dfrac{150}{0{,}9968} = 150{,}48$ meter.

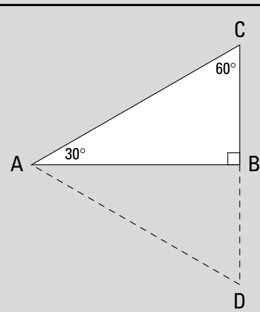
c Stel de afgelegde afstand is weer gelijk aan x. Dan geldt nu $0{,}9968 = \dfrac{400}{x}$.
Dus $x = \dfrac{400}{0{,}9968} = 401{,}28$ meter.
Vraagstuk b en c kunnen natuurlijk ook zonder goniometrische verhoudingen opgelost worden, namelijk met de stelling van Pythagoras!

Opdrachten

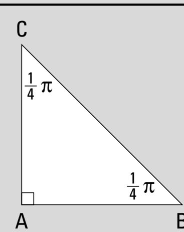
7 a De driehoek met hoeken van 30°, 60° en 90° is de helft van een gelijkzijdige driehoek ADC, zie fig. 1.12. Als AC = 2, dan BC = 1 en volgens Pythagoras AB = $\sqrt{3}$. Als AC = 8, dan BC = 4 en AB = $4\sqrt{3}$, etc. De verhouding tussen deze zijden is altijd $1 : 2 : \sqrt{3}$.

b De driehoek is gelijkbenig, AB = AC, zie fig. 1.13. Stel AB = AC = 1, dan volgens Pythagoras BC = $\sqrt{2}$. Als AB = 5 = AC, dan BC = $5\sqrt{2}$, etc. De verhouding tussen de zijden is altijd $1 : 1 : \sqrt{2}$.

Figuur 1.12



Figuur 1.13



8 Zie tabel 1.2.

Tabel 1.2 **Functiewaarden van sin *t*, cos *t* en tan *t* met *t* in radicalen**

Goniometrische functie ⇒ Hoekgrootte ⇓	**sin**	**cos**	**tan**
0	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	0	–

9 a $\cos t = \cos(t + 2k\pi)$
$\tan t = \tan(t + \pi)$

b $\cos t = \cos(-t)$, omdat de cosinusgrafiek lijnsymmetrisch is in $t = 0$.
$\tan t = -\tan(-t)$, omdat de tangensgrafiek puntsymmetrisch is in (0,0).

c sin (10°) = 0,1736 en cos (80°) = 0,1736
sin (23°) = 0,3907 en cos (67°) = 0,3907
sin (35°) = 0,5736 en cos (55°) = 0,5736
sin (47°) = 0,7314 en cos (43°) = 0,7314
sin (62°) = 0,8829 en cos (28°) = 0,8829
sin (83°) = 0,9925 en cos (7°) = 0,9925
Er geldt $\sin t = \cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ en $\cos t = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$.

Vraagstukken

1.88 a $2 \text{ rad} = \dfrac{2}{2\pi} \cdot 360° = 114{,}59°$

b $\frac{5}{4}\pi \text{ rad} = 225°$

c $-2\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = -405°$

d $1\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = 300°$

1.89 a $57° = \dfrac{57}{360} \cdot 2\pi = \dfrac{19}{60}\pi \text{ rad} \approx 0{,}32\pi \text{ rad}$

b $-230° = \frac{-23}{18}\pi \text{ rad} \approx -1{,}28\pi \text{ rad}$

c $20{,}1° = \frac{67}{600}\pi \text{ rad} = 0{,}11\pi \text{ rad}$

d $-410° = \frac{-41}{18}\pi \text{ rad} \approx -2{,}28\pi \text{ rad}$

1.90 a $\sin 225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

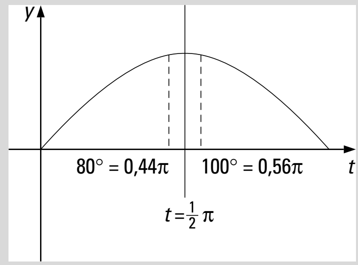
b $\cos(-45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\sin 1\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\tan(-\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

1.91 Neem $t = 10°$, dan $\sin(80°) = 0{,}985$
en $\sin(100°) = 0{,}985$
Neem $t = 50°$, dan $\sin(40°) = 0{,}643$
en $\sin(140°) = 0{,}643$
Neem $t = 80°$, dan $\sin(10°) = 0{,}1736$
en $\sin(170°) = 0{,}1736$
Het grafiekdeel links van $t = \frac{1}{2}\pi$ en het grafiekdeel rechts van $t = \frac{1}{2}\pi$ zijn elkaars spiegelbeeld, zie fig. 1.14.

Figuur 1.14



1.92

1 $\sin \frac{1}{8}\pi = 0{,}3827$	**a** $-\sin -\frac{1}{5}\pi = \cos \frac{3}{10}\pi = 0{,}5878$
2 $\cos \frac{3}{10}\pi = 0{,}5878$	**b** $\cos -\frac{1}{6}\pi = \cos \frac{1}{6}\pi = 0{,}8660$
3 $\tan \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$	**c** $-\sin -\frac{1}{8}\pi = \sin \frac{1}{8}\pi = 0{,}3827$
4 $\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}8660$	**d** $\cos \frac{3}{8}\pi = \sin \frac{1}{8}\pi = 0{,}3827$
5 $\sin \frac{2}{6}\pi = \frac{1}{2}$	**e** $-\tan -\frac{1}{3}\pi = \tan \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$
6 $\tan 60° = \tan \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$	**f** $-\tan -\frac{2}{3}\pi = -\tan \frac{1}{3}\pi = -\sqrt{3} \approx -1{,}7321$
7 $\sin 60° = \sin \frac{2}{6}\pi = \frac{1}{2}$	**g** $\sin \frac{1}{5}\pi = \cos \frac{3}{10}\pi = 0{,}5878$

Dus a is gelijk aan 2; b is gelijk aan 4; c is gelijk aan 1; d is gelijk aan 1; e is gelijk aan 3; f is gelijk aan het tegengestelde van 3 en 6 en g is gelijk aan 2.

1.5.3 De verdubbelingsformules en de sinus- en cosinusregel

Opdrachten

10 Er geldt $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

11 Een optelling of aftrekking van $\cos t$ en $\sin t$ levert niets op. Een deling dan?

$$\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Omdat $\sin 2t = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zou $\sin 2t = 2 \cdot \dfrac{\cos t}{\sin t}$. Deze conclusie is niet vol te houden als we uitkomsten van de tweede kolom invullen.
Een vermenigvuldiging dan?
$\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.
Dus $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$. Deze formule is voor elke kolom van toepassing.

12 a Zie fig. 1.15.
AC berekenen met sinusregel:

$$\frac{9}{\sin 40°} = \frac{AC}{\sin 110°} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{0{,}6428} = \frac{AC}{0{,}9397}$$

$AC \approx 13{,}1570 \approx 13{,}16$

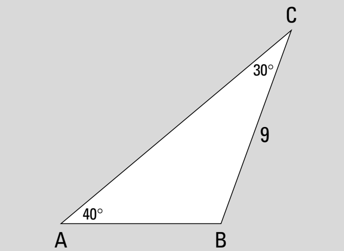
Opmerking: om voortijdige afronding uit te sluiten is de volgende aanpak beter:

$$\frac{9}{\sin 40°} = \frac{AC}{\sin 110°} \Rightarrow AC = \frac{9 \sin 110°}{\sin 40°} \approx 13{,}1571 \approx 13{,}16$$

AB berekenen met sinusregel:

$$\frac{AB}{\sin 30°} = \frac{9}{\sin 40°} \Rightarrow AB = \frac{9 \sin 30°}{\sin 40°} \approx 7{,}00$$

Figuur 1.15



b Zie fig. 1.16.
Eerst $\angle$ ACB berekenen:

$$\frac{6}{\sin \angle C} = \frac{8}{\sin 50°} \Rightarrow$$

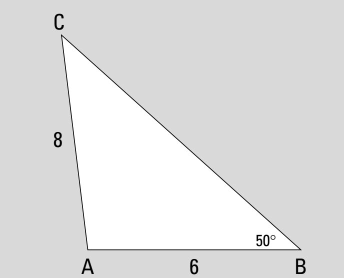
$$\sin \angle C = \frac{6 \sin 50°}{8} \approx 0{,}5745$$

$\Rightarrow \angle C = 35{,}06°$. Dus $\angle A = 94{,}94°$.

$$\frac{BC}{\sin (94{,}94°)} = \frac{8}{\sin 50°} \Rightarrow$$

$$BC = \frac{8 \sin (94{,}94°)}{\sin 50°} \approx 10{,}40$$

Figuur 1.16



13 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \alpha$, als b, c en α gegeven zijn.
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \gamma$, als a, b en γ gegeven zijn.

Vraagstukken

1.93 Volgens Pythagoras geldt: $x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Met goniometrische verhoudingen: $\cos \theta = \frac{12}{13}$. Dus $\theta = 22{,}62°$.

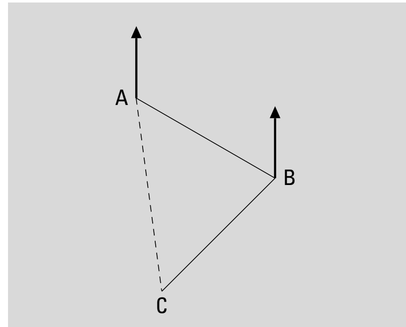
$\sin \theta = 0{,}3846 = \frac{x}{13}$. Dan $x = 13 \cdot 0{,}3846 = 5{,}00$.

1.94 In Δ ABC geldt $\frac{28}{\sin 150°} = \frac{20}{\sin \angle A}$.

Dus $\sin \angle A = \frac{20 \cdot \sin 150°}{28} = 0{,}3571$.

Dan A = 20,92° en dus B = 180° − 150° − 20,92° = 9,08°.

1.95 Van Δ ABC is gegeven
AB = 20, BC = 30 en $\angle$ ABC = 75°.
Gevraagd wordt de afstand AC = b.
Er geldt nu $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.
Ingevuld geeft dit:
$b^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cos 75° =$
$989{,}4171 \approx 31{,}46$.



Opdrachten

14 a $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos \alpha$
$= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

b $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot (-\sin \beta)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

15 Gegeven een hoek ter grootte van α. Op het draaibeen ligt het punt P met coördinaten (x_p, y_p). OP = 1, dan geldt:

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha &= y_p \\ \cos \alpha &= x_p \\ \tan \alpha &= \frac{y_p}{x_p} \end{aligned}\right\} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

16 $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 45°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$\tan 15° = \dfrac{\sin 15°}{\cos 15°}$; $\sin 15° = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

Nu berekenen we cos 15°:
$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$$\tan 15° = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}$$
$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos 45°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$
Dit klopt weer met de theorie dat sin 75° = cos 15°.

17 Zie fig. 1.17.
$\sin \alpha = \dfrac{12}{13}$, d.w.z. dat: $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{CD}{15} = \dfrac{12}{13} \Rightarrow CD = \dfrac{12 \cdot 15}{13} = 13{,}85$

$\sin \beta = \dfrac{4}{5}$, d.w.z. dat: $\dfrac{CD}{a} = \dfrac{13{,}85}{a} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow a = \dfrac{5 \cdot 13{,}85}{4} = 17{,}31$

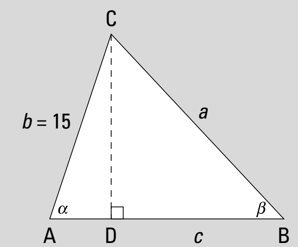
Uit $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ volgt $\alpha = 67{,}38°$ of $\alpha = 112{,}62°$

Uit $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ volgt $\beta = 53{,}13°$ of $\beta = 126{,}87°$

Van de combinaties α en β kan $\alpha = 67{,}38°$ en $\beta = 126{,}87°$ niet voorkomen. De grootte van γ kan dus zijn: 59,49° of 14,25°.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$\Rightarrow c^2 = 299{,}6361 + 225 - 519{,}3 \cdot \cos(59{,}49°)$
$c^2 = 260{,}9933 \Rightarrow c = 16{,}16$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$\Rightarrow c^2 = 299{,}6361 + 225 - 519{,}3 \cdot \cos(14{,}25°)$
$c^2 = 21{,}60526 \Rightarrow c = 4{,}65$

Figuur 1.17



Vraagstukken

1.96 $\sin t = \frac{12}{13}$, t in $[0; \frac{1}{2}\pi]$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow \cos^2 t + 0{,}85207 = 1$
$\Rightarrow \cos^2 t = 0{,}14793$
$\Rightarrow \cos t = 0{,}3846$ of $\cos t = -0{,}3846$ (v.n.)

$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot 0{,}3846 = 0{,}7100$

$\tan 2t = \dfrac{\sin 2t}{\cos 2t}$; $\cos 2t$ berekenen:

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 0{,}14793 - 0{,}85207 = -0{,}70414$

Dan $\tan 2t = \dfrac{0{,}7100}{-0{,}70414} = -1{,}0083$

$\cos(\frac{1}{2}t) = ?$
We weten:
$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ en $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow \cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$.
Hieruit volgt:
$\cos 2t = \cos^2 t + \cos^2 t - 1 = 2\cos^2 t - 1$, dus geldt ook:
$\cos t = 2\cos^2(\frac{1}{2}t) - 1 \Rightarrow 2\cos^2(\frac{1}{2}t) = \cos t + 1$

$$\Rightarrow \cos^2(\tfrac{1}{2}t) = \frac{\cos t + 1}{2}$$

Dus $\cos^2(\frac{1}{2}t) = \dfrac{0{,}3846 + 1}{2} = 0{,}6923$

$\Rightarrow \cos(\frac{1}{2}t) = 0{,}8320$ of $\cos(\frac{1}{2}t) = -0{,}8320$ (v.n.)

$\sin(\frac{1}{2}t) = ?$

$\cos^2(\frac{1}{2}t) + \sin^2(\frac{1}{2}t) = 1 \Rightarrow 0{,}6923 + \sin^2(\frac{1}{2}t) = 1$

$\Rightarrow \sin^2(\frac{1}{2}t) = 0{,}3077$

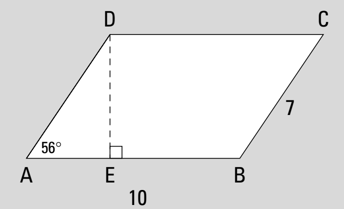
$\Rightarrow \sin(\frac{1}{2}t) = 0{,}5547$ of $\sin(\frac{1}{2}t) = -0{,}5547$ (v.n.)

1.97 $\sin(-\frac{1}{12}\pi) = -\sin(\frac{1}{12}\pi) = -\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi)$
$= -(\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) - \sin(\frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi))$
$= -(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$\cos(-\tfrac{1}{12}\pi) = \cos(\tfrac{1}{12}\pi) = \cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{6}\pi)$$
$$= \cos(\tfrac{1}{4}\pi)\cdot\cos(\tfrac{1}{6}\pi) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi)\cdot\sin(\tfrac{1}{6}\pi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$
$$\tan(-\tfrac{1}{12}\pi) = \frac{\sin(-\tfrac{1}{12}\pi)}{\cos(-\tfrac{1}{12}\pi)} = \frac{-\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}{\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}$$

1.98 Zie fig. 1.18.
Oppervlakte parallellogram
= AB · DE

Figuur 1.18



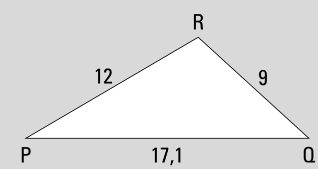
DE berekenen:

$\sin\angle A = \sin 56° = \dfrac{DE}{7}$

DE = 7 · sin 56° = 5,80
Oppervlakte = 10 · 5,80 = 58,0

1.99 Zie fig. 1.19.
$\angle P = ?$
$9^2 = 12^2 + (17{,}1)^2 - 2\cdot 12\cdot 17{,}1\cdot \cos\angle P$
$81 = 144 + 292{,}41 - 410{,}4\cdot\cos\angle P$
$-355{,}41 = -410{,}4\cdot\cos\angle P$
$\cos\angle P = 0{,}8660$
$\angle P = 30{,}0°$
$\angle Q = ?$

Figuur 1.19



$$\frac{12}{\sin\angle Q} = \frac{9}{\sin\angle P} \Rightarrow \sin\angle Q = \frac{12\cdot\sin\angle P}{9} = 0{,}6667$$

$\Rightarrow Q = 41{,}81°$

1.100 $\tan^2 t = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \Rightarrow \tan^2 t + 1 = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

1.101 a $\cos^2 t \geqq 0$ evenals $\sin^2 t \geqq 0$. Dus de grafieken liggen op of boven de t-as.

b De grafiek van $y = \cos^2 t + \sin^2 t$ is een rechte lijn en valt samen met de grafiek van $y = 1$. Gegeven een willekeurige hoek α. Op het draaibeen ligt het punt P $(x_p\,;y_p)$. OP = 1. Vanuit P is een loodlijn te tekenen op de t-as. Volgens Pythagoras geldt $(y_p)^2 + (x_p)^2 = 1$.

Eindtoets

1 a $\sin\alpha = \tfrac{2}{3}$

α in$[0\,;\tfrac{1}{2}\pi\rangle$ of in $[\tfrac{1}{2}\pi\,;\pi\rangle$

$\alpha = 41{,}81° = 0{,}23\pi$ rad of
$\alpha = 180° - 41{,}81° = 138{,}19° = 0{,}77\pi$ rad

b $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

α in $[\frac{1}{2}\pi \,;\, \pi\rangle$ of in $[\pi \,;\, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$

$\alpha = 157{,}38° = 0{,}87\,\pi$ rad of
$\alpha = 360° - 157{,}38° = 202{,}62° = 1{,}13\,\pi$ rad

c $\tan \alpha = 3\frac{2}{5}$

α in $[0 \,;\, \frac{1}{2}\pi\rangle$ of in $[\pi \,;\, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$

$\alpha = 73{,}61° = 0{,}41\,\pi$ rad of
$\alpha = 180° + 73{,}61° = 253{,}61° = 1{,}4\,\pi$ rad

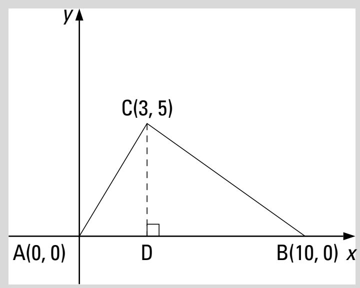
d $\sin \alpha = \; - 1{,}2$ kan niet.

2 Zie fig. 1.20.

$\sin \angle \mathrm{B} = \dfrac{5}{\sqrt{74}}$ en niet $-\dfrac{5}{\sqrt{74}}$

$\tan \angle \mathrm{B} = \frac{5}{7}$
Het goede antwoord is **d**.

Figuur 1.20



3 a $-0° = \frac{-30}{360} \cdot 2\pi$ rad $= -\frac{1}{6}\pi$ rad

b $140° = 0{,}78\pi$ rad $= \frac{7}{9}\pi$ rad

c $-295° = -1{,}64\,\pi$ rad

d $2\frac{1}{4}\pi$ rad $= 405°$

e $-1{,}5$ rad $= -270°$

f $4\frac{1}{3}\pi$ rad $= 780°$

4 a $\sin 37° \;\; = \cos 53°$

b $\cos 205° = -\sin 65°$

c $\sin 102° = \cos 12°$

d $\cos 300° = \sin 30°$

5 a $\sin 105°$
$= \sin (45° + 60°)$
$= \sin 45° \cdot \cos 60° + \sin 60° \cdot \cos 45°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}6$

b $\cos 195°$
$= \cos (135° + 60°)$
$= \cos 135° \cdot \cos 60° - \sin 135° \cdot \sin 60°$
$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}6$

c $\sin (-195°)$
$= \sin 165° = \sin (120° + 45°)$
$= \sin 120° \cdot \cos 45° + \sin 45° \cdot \cos 120°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$
of $\sin (-195°) = -\sin (195°)$, enz.

d tan 345° $= -\tan 15° = -\tan(45° - 30°)$

$$= \frac{-\sin(45° - 30°)}{\cos(45° - 30°)}$$

$\sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 45°$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

$\cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30°$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

Dus tan 345° $= \dfrac{-\tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}{\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}} = \dfrac{-\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}{\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}$

6 Zie fig. 1.21.
We berekenen eerst de lengte van c, dan α en daarna β.

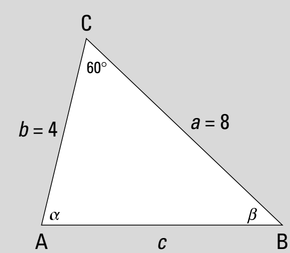
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$= 64 + 16 - 2 \cdot 8 \cdot 4\cos 60°$
$= 48$
$c = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$

$$\frac{8}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{48}}{\sin 60°}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{8\sin 60°}{\sqrt{48}} = 1$$

$\Rightarrow \alpha = 90°$
$\beta = 180° - 60° - 90° = 30°$

Figuur 1.21



7 $\sin\beta = \dfrac{CD}{\sqrt{84}} = \dfrac{4}{10} \Rightarrow CD = \dfrac{4\sqrt{84}}{10} = 3{,}7$

Opmerking: $BC = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84}$

8 $\cos t = -\frac{4}{5}$ voor $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$

a $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$

Als $\cos t = -\frac{4}{5}$, dan $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \sin^2 t = 1$

$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{9}{25}$

$\Rightarrow \sin t = \frac{3}{5}$ of $\sin t = -\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$, dan $\sin t = \frac{3}{5}$

dus $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$

b $\tan 2t = \dfrac{\sin 2t}{\cos 2t}$; eerst $\cos 2t$ berekenen:

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$$\tan 2t = \frac{\frac{-24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7} = -3\tfrac{3}{7}$$

c $\cos 2t = \frac{7}{25}$ (zie **b**)

d $\sin t = \frac{3}{5}$ (zie **a**)

Conclusie: Antwoord **b** is juist.