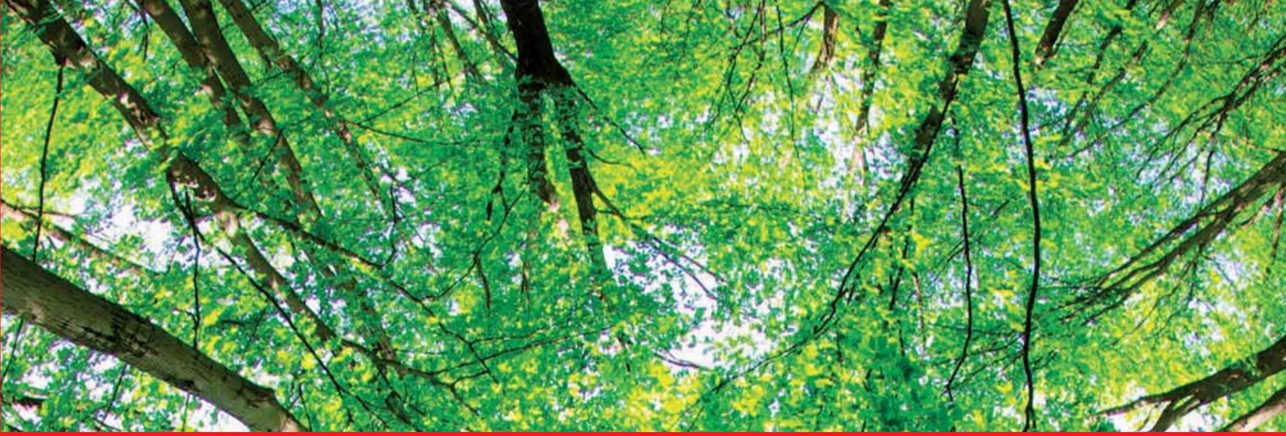
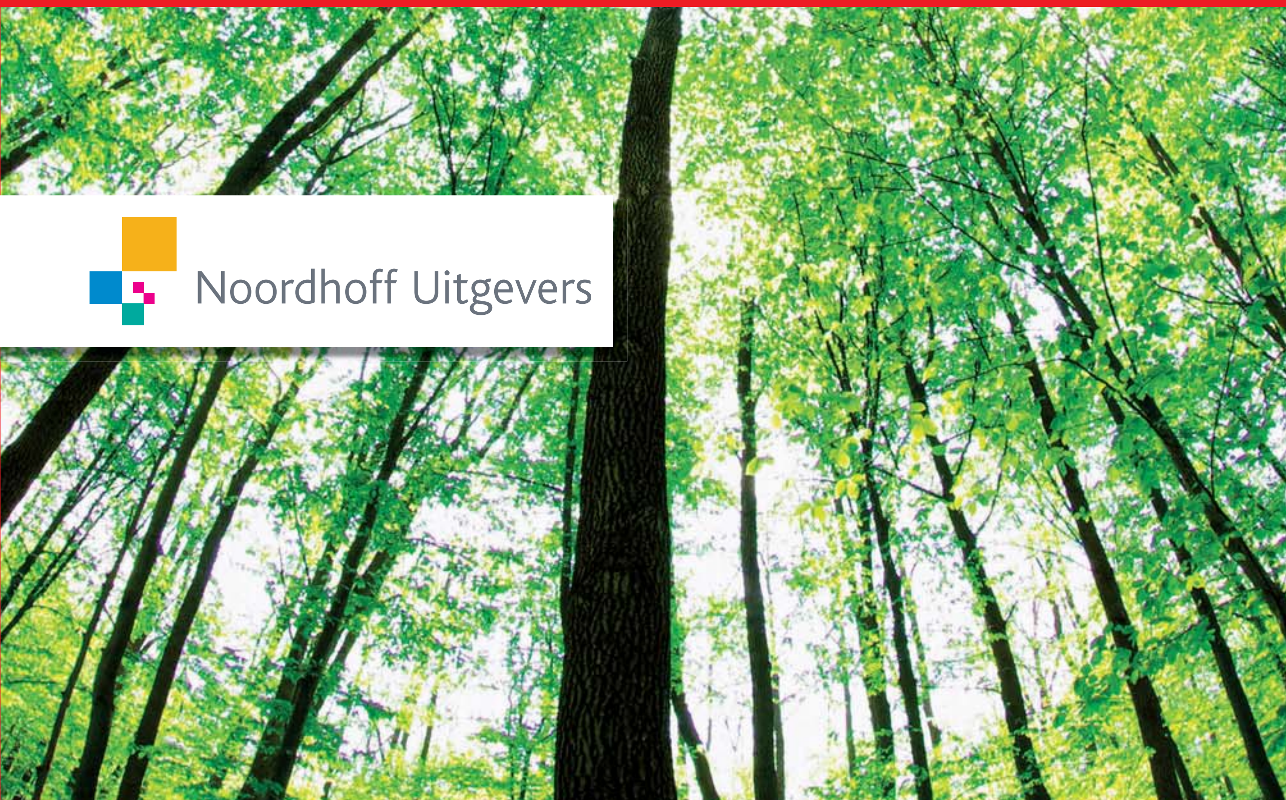


Levensverzekeringswiskunde

C.C.W. Pinkse

Zesde druk



Noordhoff Uitgevers

Levensverzekeringswiskunde

Levensverzekerings-wiskunde

mr. drs. C.C.W. Pinkse RA

Zesde druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Ontwerp omslag: G2K, Groningen
Omslagillustratie: Shutterstock

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

0 1 2 3 4 5 / 13 12 11 10 09

ISBN (ebook) 978 90 01 84364 9
ISBN 978 90 01 78009 8
NUR 786

Woord vooraf bij de zesde druk

Het doel van dit boek is om in een korte tijd de student de beginselen van de levensverzekeringswiskunde duidelijk te maken.
Levensverzekeringswiskunde is noodzakelijk om de pensioenverplichtingen in de jaarrekening te kunnen beoordelen.
De waardering van pensioenverplichtingen wordt beïnvloed door de fiscale wetgeving, de Pensioenwet, IAS 19 en RJ 271. Deze bepalingen zijn zeer ingewikkeld en wijzigen voortdurend.

Dit boek beperkt zich daarom nagenoeg uitsluitend tot de rekentechniek, speciaal van het ouderdomspensioen en het nabestaandenpensioen.

De belangrijkste wijzigingen ten opzichte van de vijfde druk zijn:
- een website met de mogelijkheid om met toepassing van de AG Tafel 2000-2005 (afgeronde sterftequotiënten) berekeningen met Excel te maken, een toelichting is opgenomen in appendix 3;
- toevoeging in hoofdstuk 6 van de zogenoemde PUCM (Projected Unit Credit methode);
- de verzekering bij overlijden is beperkt tot een uitkering direct na het overlijden;
- door de fiscale invoering van de korting op de pensioenrechten bij ingang eerder dan het 65ste jaar, zijn de pensioendata gebracht op 65 jaar.

Voor docenten zijn de uitwerkingen van de basisopgaven, de oefenopgaven en de herhalingsopgaven via de website www.levensverzekeringswiskunde.noordhoff.nl te verkrijgen.

Inhoud

Inleiding

De meeste bedrijven hebben in een of andere vorm te maken met pensioenen van hun werknemers. Er is een viertal hoofdvormen te onderscheiden ten aanzien van de onderbrenging van de pensioenverplichtingen:

- *Bedrijfstakpensioenfondsen*. Bijna altijd is deelname verplicht. Er wordt een doorsneepremie geheven. De werkgever heeft meestal geen verdere verplichtingen dan het betalen van die doorsneepremie, dus is er alleen effect voor de winst-en-verliesrekening. Van toepassing is de Wet Bpf 2000.
- *Beroepspensioenfondsen*. Deze zijn bijvoorbeeld voor huisartsen en notarissen.
- *Ondernemingspensioenfondsen*. De Pensioenwet eist dat ondernemingspensioenfondsen rechtspersoonlijkheid bezitten. Voor de grotere bedrijven of concerns is dat meestal de stichting, voor de kleinere bedrijven de stichting of de besloten vennootschap, met name indien er slechts enkele werknemers (meestal aandeelhouders) zijn. Afhankelijk van de contractuele verhoudingen zijn er gevolgen zowel voor de balans als voor de winst-en-verliesrekening.
- *Levensverzekeringsmaatschappij*. Afhankelijk van de contractuele verhoudingen zijn er gevolgen zowel voor de balans als voor de winst-en-verliesrekening.
- *In eigen beheer van de vennootschap*. Dit is volgens de Pensioenwet bijna alleen toegestaan voor de werknemer die tevens grootaandeelhouder is. Er zullen altijd gevolgen zijn voor de balans en de winst-en-verliesrekening.

Het hiernavolgende zal zijn toegespitst op de laatste drie vormen. Immers, de accountant zal bij de controle van de jaarrekening moeten nagaan of voor de toegekende pensioenrechten voldoende voorzieningen op de balans zijn opgenomen. Daarnaast zal het veelvuldig voorkomen dat hem om raad zal worden gevraagd omtrent pensioenproblemen.

Indien een regeling voldoet aan de fiscale bepalingen is de dotatie aftrekbaar en de latere uitkering belast. Elke pensioenregeling zal daarom voldoen aan de fiscale regelingen.
De vroegere Pensioen- en spaarfondsenwet (Pensioenwet) is in 2007 vervangen door de Pensioenwet. De Pensioenwet geeft het dwingende juridische kader voor de diverse soorten pensioenregelingen en regelt het toezicht door DNB en AFM.
De IAS 19 en RJ 271 geven de regels voor de jaarverslaggeving.

Het doel van het hierna behandelde is:

- het kunnen uitvoeren van eenvoudige actuariële berekeningen;
- het kunnen onderkennen of er pensioenverplichtingen zijn aangegaan waarvoor op de balans niet gereserveerd is;
- het globaal kunnen toetsen van wat ingewikkelder actuariële berekeningen, zodanig dat de accountant bij de kleinere pensioenlichamen kan functioneren zonder verdere bijscholing;

- de achtergronden te kennen van leeftijdsterugstellingen, rentekortingen en kostenaspecten.

De eerste vijf hoofdstukken zijn in hoofdzaak een inleiding op hoofdstuk 6: Pensioenen. Dat hoofdstuk bevat de eindtermen van de vereiste basiskennis.

Bij het vak Externe Verslaggeving wordt uitvoerig ingegaan op de eisen voor de verslaglegging van vennootschappen voor het onderdeel pensioenen. Deze eisen zijn opgenomen in IAS 19 en RJ 271, samen bijna 200 bladzijden. Het zal duidelijk zijn dat hierop in dit boek niet nader kan worden ingegaan.
Voor de fiscale aspecten zal veelal overleg met een fiscalist nodig zijn.

De opbouw per hoofdstuk is steeds als volgt:
- behandeling van de theorie;
- basisopgaven om gedeeltelijk tijdens de colleges te behandelen, de antwoorden zijn achter in dit boek opgenomen;
- voorbeeldopgaven voor zelfstudie, de volledige uitwerkingen zijn achter in dit boek opgenomen. Een uitwerking begrijpen en zelf een opgave kunnen maken is volstrekt niet hetzelfde;
- oefenopgaven om thuis te maken, de antwoorden zijn achter in dit boek opgenomen.

De studenten hebben meestal weinig problemen met de eerste drie hoofdstukken. De bestudering daarvan kan daarom in korte tijd geschieden. Men komt in verwarring bij de uitkeringen op twee levens in hoofdstuk 4 en bij de pensioenproblematiek. En juist de pensioenproblematiek is het doel.

Koopsommen kapitaal- en lijfrente-verzekeringen

1

Het simpelste probleem in de levensverzekeringswiskunde is: iemand wil nu een bedrag betalen zodanig, dat over 30 jaar, mits in leven, 50.000 wordt uitgekeerd.
Bij nadere analysering blijkt er een aantal aspecten:

- Er is sprake van bedragen op verschillende tijdstippen, dus er moet rekening worden gehouden met de interestvoet.
- Wat is de leeftijd? Immers, de kans dat iemand van 10 jaar de leeftijd van 40 bereikt, is duidelijk groter dan de kans dat een 70-jarige 100 wordt.
- Is het een man of is het een vrouw? Het is algemeen bekend dat de vrouw gemiddeld ouder wordt dan de man.

Rekenrente

Levensverzekeringen hebben veelal een lange looptijd. De ontwikkeling van de interestvoet op de lange termijn is onzeker. De verzekeraar zal daarom zijn berekeningen voorzichtig opstellen. Uit de financiële rekenkunde volgt dan dat de interestvoet zo laag mogelijk zal worden gesteld. Tot 1998 was het gebruikelijk om de interestvoet te stellen op 4%. Eind 1998, begin 1999 daalde de interestvoet voor langlopende staatsleningen echter beneden de 4%. De Pensioen- & Verzekeringskamer (in 2004 gefuseerd met DNB) heeft bepaald dat vanaf augustus 1999 voor nieuwe contracten de interestvoet moet worden gesteld op 3%. Indien de werkelijke interestvoet op het moment van afsluiten van een verzekering hoger is, worden om markttechnische redenen kortingen overeengekomen. De fiscale wetgeving/jurisprudentie eist echter voor voorzieningen op de balans inzake pensioenen in eigen beheer voor de directeur/grootaandeelhouder een minimale interestvoet van 4%.
Voor de verslaglegging gelden weer andere interestvoeten.

In dit boek wordt steeds uitgegaan van een interestvoet van 4%, tenzij expliciet het tegendeel is vermeld.
De interestvoet waarmee men bij levensverzekeringswiskunde werkt, wordt de *rekenrente* genoemd.

AG-tafels
Het Centraal Bureau voor de Statistiek publiceert periodiek sterftecijfers gebaseerd op rechtstreekse waarnemingen van de sterfte in Nederland, uitgesplitst naar mannen en vrouwen. Op basis hiervan publiceert het Actuarieel Genootschap iedere 5 jaar zijn AG-tafels. In deze AG-tafels wordt eerst de sterfte volgens het CBS enigszins vloeiend gemaakt, mede door toepassing van de sterftewet van Makeham, ter voorkoming van vreemde, wellicht toevallige, knikken in het sterfteverloop.
Eind 2007 werden de volgende AG-tafels gepubliceerd:

- AG-tafel 2000-2005 (waargenomen sterftequotiënten);
- AG-tafel 2000-2005 (afgeronde sterftequotiënten);
- Prognosetafel 2005-2050;
- AG-tafel Roken – Niet Roken.

Een gedeelte van de AG-tafel 2000-2005 (afgeronde sterftequotiënten) is opgenomen op de website.

In dit boek is uitgegaan van oudere gegevens. Daarbij is er een combinatie gemaakt van sterfte en interestvoet. In appendix 2 zijn de volgende tafels opgenomen:

- GBM: De Gehele Bevolking Mannen;
- GBV: De Gehele Bevolking Vrouwen;
- GB: De Gehele Bevolking, namelijk gecombineerde kansen, zoals bij een nabestaandenpensioen.

Deze tafels waren vroeger onmisbaar, omdat anders voor elke pensioenberekening langdurige berekeningen nodig waren. Door de komst van de computer gaan de berekeningen thans bij toepassing van de juiste software veel sneller. Uit didactische overwegingen is een uittreksel uit deze tafels, zoals opgenomen in appendix 2, echter onmisbaar. Het is voor dat doel niet relevant om de meest recente tafels te hanteren.
De tafels gaan uit van 10 000 000 nuljarigen en geven vervolgens per leeftijd het aantal overgebleven personen weer. In het volgende overzicht zijn opgenomen de percentages mannen en vrouwen die op basis van de AG-tafel 1976-1980 op enkele leeftijden nog in leven zijn:

Leeftijd	Mannen	Vrouwen
40	97	98
60	85	93
70	65	82
80	34	57
90	7	18

Hieruit blijkt duidelijk dat de vrouwen gemiddeld langer leven dan de mannen.
De levenskansen nemen in Nederland nog steeds toe. Volgens de AG-tafel 2000-2005 zijn de percentages mannen en vrouwen die op eerder vermelde leeftijden nog in leven zijn, als volgt:

Leeftijd	Mannen	Vrouwen
40	98	98
60	90	93
70	76	85
80	46	64
90	11	24

De resterende levensverwachting voor een 65-jarige man is bij de overlevingstafel 2000-2005 ten opzichte van de vorige overlevingstafel gestegen van 14,6 naar 15,8 jaar en voor een 65-jarige vrouw van 19,0 naar 19,5 jaar. Het verschil in resterende levensverwachting is dus afgenomen van 4,4 naar 3,7 jaar.

Leeftijdsterugstelling

De berekeningen bij levensverzekeringswiskunde zijn altijd gebaseerd op een recente tafel. Er wordt dus steeds uitgegaan van historische gegevens. Hierin schuilt een risico nu nog steeds blijkt dat de levenskansen toenemen. Een ander risico voor de verzekeringsmaatschappijen is dat alleen mensen die denken dat zij zeer gezond zijn, een levensverzekering zullen afsluiten. Er is dus sprake van een zekere mate van *autoselectie* waardoor de levenskansen van vrijwillig verzekerde personen groter zijn dan volgt uit de historische tabellen die gebaseerd zijn op de gehele bevolking van Nederland. Om deze twee redenen passen de verzekeringsmaatschappijen bij *individuele* verzekeringen *leeftijdsterugstelling* toe. Gebruikelijk is een leeftijdsterugstelling voor mannen van 5 jaar en voor vrouwen van 6 jaar. Leeftijdsterugstelling houdt in dat een man van 40 jaar aangemerkt wordt alsof deze man pas 35 jaar is. De verzekerde zal daardoor een hoger bedrag voor de verzekering moeten betalen.

Verband tussen l_x en l_{x+1}

In de overlevingstafels zijn de volgende symbolen opgenomen of daaruit af te leiden:

l_x: het aantal levenden van x jaar;

d_x: het aantal personen dat in het jaar x zal overlijden;

q_x: de sterftekans, dit is de kans om binnen één jaar te overlijden;

De volgende verbanden zijn vanzelfsprekend:

$$l_x \times q_x = d_x$$

$$l_x - d_x = l_{x+1}$$

Koopsom kapitaalverzekering

Een koopsom is een eenmalige tegenprestatie voor het verkregen recht. De koopsom is dus de contante waarde, rekening houdende met de sterftekans, van de te ontvangen uitkering(en).

Uitsluitend met een tafel waarin alle l_x zijn opgenomen, kunnen de meeste opgaven al worden uitgerekend.

Stel, een man van 40 sluit een verzekering af op zijn leven met een dusdanige koopsom dat hij, indien hij op zijn 70ste jaar nog in leven is, 50.000 ontvangt. Omdat hier sprake is van de uitkering van één bedrag bij het in leven zijn op een bepaalde datum, wordt een dergelijke verzekering aangeduid met de term *kapitaalverzekering*.

Uit Appendix 2 blijkt dat $l_{40} = 9\,728\,299$ en $l_{70} = 6\,525\,335$.

Dit houdt dus in dat van de 9 728 299 40-jarigen er nog 6 525 335 na 30 jaren in leven zullen zijn. Nu gaat het niet om die exacte aantallen, maar om de verhouding tussen beide. De kans dat een 40-jarige 70 zal worden, bedraagt

$$\frac{6\,525\,335}{9\,728\,299} \times 100\% = 67\%.$$

De verzekeringsmaatschappij zal dus in 67% van de gevallen bij de genoemde verzekering een uitkering moeten doen. Tevens moet in de berekening de interestfactor worden verwerkt. De koopsom zal dus zijn:

$$\frac{6\,525\,335}{9\,728\,299} \times 50.000 \times 1{,}04^{-30} = 10.340.$$

In de financiële rekenkunde wordt voor $1{,}04^{-30}$ het symbool $A_{\overline{30|}4}$ gebruikt. In formulevorm bedraagt de koopsom dan:

$$\frac{l_{70}}{l_{40}} \times A_{\overline{30|}4} \times 50.000$$

Indien $1{,}04^{-30}$ wordt vermenigvuldigd met $\frac{1{,}04^{-40}}{1{,}04^{-40}}$, ontstaat $\frac{1{,}04^{-70}}{1{,}04^{-40}}$, ofwel $\frac{A_{\overline{70|}4}}{A_{\overline{40|}4}}$.

De formule wordt dan:

$$\frac{l_{70} \times A_{\overline{70|}4}}{l_{40} \times A_{\overline{40|}4}} \times 50.000 = \frac{D_{70}}{D_{40}} \times 50.000 = \frac{4.190{,}5}{20.263} \times 50.000 = 10.340.$$

Voor het product $l_x \times A_{\overline{x|}p}$ wordt het *commutatieteken* D_x gebruikt. Voor alle leeftijden, voor zowel man als vrouw, zijn in de overlevingstafels in appendix 2 de waarden van D_x uitgerekend.

Door middel van deze omzetting is het rekenwerk geminimaliseerd. Voor een dergelijke kapitaalverzekering bestaat het symbool ${}_nE_x$, waarbij x de leeftijd op het moment van afsluiten voorstelt en n de duur van de verzekering. In deze uitgave zal echter het vaak gebruikte *symbool* $A_{x\overline{n|}}^{\;1}$ worden gebruikt, omdat dit symbool logischer aansluit bij de financiële rekenkunde en de overige actuariële symbolen.

$$A_{x\overline{n|}}^{\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Het symbool $A_{40\,\overline{30|}}^{\;1}$ betekent de koopsom voor een 40-jarige voor een uitkering ineens na 30 jaar van een kapitaal ter grootte van 1, mits de persoon dan nog in leven is; de koopsom voor deze kapitaalverzekering wordt berekend door het symbool om te zetten in commutatietekens (D_{70}/D_{40}) en deze breuk vervolgens met behulp van de commutatietafels (combinatie van overlevingstafel en commutatietekens) uit te rekenen.

In het gegeven voorbeeld moet de 40-jarige man dus een koopsom betalen van 10.340 om over 30 jaar, mits hij in leven is, 50.000 te ontvangen. Zou hij de 10.340 gedurende 30 jaar hebben belegd tegen 4%, dan zou hij na 30 jaar kunnen beschikken over 10.340 $\times$ $S_{\overline{30}|4}$ = 33.537.
Het verschil tussen de 50.000 en de 33.537 is uitsluitend veroorzaakt door de sterftekans. Bij het toetsen van uitkomsten van berekeningen moet altijd worden gedacht zowel aan de invloed van de interestvoet als aan de invloed van de sterftekans.

Koopsom lijfrenteverzekering
Vanuit de financiële rekenkunde is het begrip ‘rente’ bekend: een periodiek vervallend gelijk bedrag. Een soortgelijk begrip bestaat er in de levensverzekeringswiskunde: de *lijfrente*. De lijfrente is een rente die ophoudt wanneer de verzekerde overlijdt. Er bestaan drie basisvormen:
1 de levenslange lijfrente
2 de tijdelijke lijfrente
3 de uitgestelde lijfrente.

De tijdelijke lijfrente stopt zowel bij overlijden als op het vooraf overeengekomen tijdstip. De uitgestelde lijfrente gaat eerst in op een van tevoren bepaald tijdstip mits de verzekerde in leven is. De tijdelijke en uitgestelde lijfrenten zijn natuurlijk ook te combineren.
Bij de financiële rekenkunde is geleerd dat het symbool $a_{\overline{n}|p}$ voorstelt het gesommeerd aantal $A_{\overline{1}|p}$ tot en met $A_{\overline{n}|p}$. Bij de levensverzekeringswiskunde betekent het symbool $a_{x\overline{n}|}$ naar analogie het gesommeerd aantal $A_{x\overline{1}|}^{\;1}$ tot en met $A_{x\overline{n}|}^{\;1}$. Dit is een dadelijk ingaande postnumerando tijdelijke lijfrente gedurende n jaar op het leven van een x-jarige. Omdat bij levensverzekeringswiskunde als uitgangspunt altijd wordt gewerkt met het vaste percentage 4, wordt in de symbolen de p gewoonlijk niet vermeld.

Koopsom postnumerando tijdelijke lijfrente
Een 60-jarige man sluit tegen koopsombetaling een tijdelijke dadelijk ingaande postnumerando lijfrente van 10.000 met een looptijd van 3 jaar:

$$a_{60\,\overline{3}|} = A_{60\,\overline{1}|}^{\;1} + A_{60\,\overline{2}|}^{\;1} + A_{60\,\overline{3}|}^{\;1} = \frac{D_{61} + D_{62} + D_{63}}{D_{60}} = 2{,}679386$$

De koopsom bedraagt dan 10.000 $\times$ 2,679386 = 26.794.
Bij een dergelijk korte lijfrente is de sommatie niet tijdrovend. Zou het echter een 20-jarige looptijd betreffen, dan is deze berekeningsmethode tijdrovend met kans op vergissingen. Daarom is het commutatieteken N_x ingevoerd. N_x betekent het gesommeerde aantal D_x tot en met D_ω waarbij de Griekse letter ω (omega) de hoogste leeftijd voorstelt in de overlevingstafel. In een wat meer wiskundige notatie:

$$N_x = \sum_{r=x}^{\omega} D_r$$

We kunnen nu de volgende twee vergelijkingen van elkaar aftrekken:

$$
\begin{array}{l}
N_{61} = D_{61} + D_{62} + D_{63} + D_{64} + D_{65} + \ldots + D_{\omega} \\
N_{64} = \phantom{D_{61} + D_{62} + D_{63} +} D_{64} + D_{65} + \ldots + D_{\omega} \\
\hline
N_{61} - N_{64} = D_{61} + D_{62} + D_{63}
\end{array}
$$

Voor de koopsom van de reeds genoemde 3-jarige lijfrente kan nu worden geschreven:

$$a_{60\,\overline{3}|} = \frac{D_{61} + D_{62} + D_{63}}{D_{60}} = \frac{N_{61} - N_{64}}{D_{60}}$$

En in het algemeen:

$$a_{x\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Koopsom levenslange postnumerando lijfrente
Zonder verdere toelichting moet duidelijk zijn dat voor een dadelijk ingaande levenslange postnumerando lijfrente voor een 60-jarige geldt:

$$a_{60} = \frac{N_{61}}{D_{60}},$$

en in het algemeen:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Koopsom uitgestelde levenslange postnumerando lijfrente
Voor een 10 jaar uitgestelde levenslange postnumerando lijfrente voor een 60-jarige geldt:

$$_{10|}a_{60} = \frac{N_{60+10+1}}{D_{60}} = \frac{N_{71}}{D_{60}},$$

en in het algemeen bij m jaar uitstel:

$$_{m|}a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

Koopsom uitgestelde tijdelijke postnumerando lijfrente
En voor een 10 jaar uitgestelde postnumerando lijfrente voor een 60-jarige gedurende 20 jaar geldt:

$$_{10|}a_{60\,\overline{20}|} = \frac{N_{60+10+1} - N_{60+10+20+1}}{D_{60}} = \frac{N_{71} - N_{91}}{D_{60}},$$

en in het algemeen:

$$_{m|}a_{x\overline{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

Bij vergelijking van voorgaande 4 formules valt op dat in de noemer steeds D_x staat. Dat is logisch, omdat steeds de kans wordt berekend uitgaande van de x-jarige.

Koopsom prenumerando lijfrente
De lijfrente kan niet alleen postnumerando zijn, maar ook prenumerando. Dit houdt in dat in de voorgaande formules de 1 telkens wegvalt.

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} \qquad _{m|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Deze formules moet u primair begrijpen en niet gedachteloos toepassen, want dan komt u bij de volgende hoofdstukken in moeilijkheden. Telkens als u de N_x gebruikt, moet u zich realiseren dat deze de gesommeerde D voorstelt.

Verband tussen de commutatietekens *D* en *N*
Indien men in een commutatietafel niet de beschikking heeft over de D-waarden, maar wel over de N-waarden, dan volgt uit het voorgaande:

$$D_x = N_x - N_{x+1}$$

Immers, N_x en N_{x+1} zijn identiek, behalve dat in de term N_{x+1} de D_x ontbreekt.

Andere interestvoet
Bij berekeningen met een andere interestvoet dan in de beschikbare commutatietabellen moet worden teruggevallen op het oorspronkelijke uitgangspunt:

$$D_x = l_x \times (1 + i)^{-x}, \text{ dus bij } x = 60 \text{ en } i = 0{,}045\text{: } D_{60} = l_{60} \times 1{,}045^{-60}.$$

Voor de N_x bestaat een dergelijk eenvoudig verband niet.

Verband tussen koopsom levenslange pre- en postnumerando lijfrente
Het verschil tussen een dadelijk ingaande levenslange postnumerando en eenzelfde prenumerando lijfrente is uitsluitend de eerste termijn die bij de prenumerando lijfrente wordt ontvangen. Deze eerste termijn behoeft niet meer contant te worden gemaakt, terwijl evenmin sterfte kan optreden. Het verschil tussen beide is derhalve 1.

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Voorbeeld lijfrentevormen
Als samenvatting geven we een voorbeeld:

Gegevens:
Een vrouw van 40 sluit de volgende verzekeringen tegen koopsom af, de uitkeringen bedragen telkens 10.000:

a een dadelijk ingaande postnumerando lijfrente;
b een dadelijk ingaande prenumerando lijfrente;
c een lijfrente ingaande bij 60-jarige leeftijd, postnumerando uit te keren;
d idem, maar dan prenumerando;
e een eenmalige uitkering op haar 60ste verjaardag;

f een tijdelijke postnumerando lijfrente gedurende de eerstkomende 20 jaar;
g idem, maar dan prenumerando.

Gevraagd:
De koopsommen en de onderlinge verhoudingen.

a $K = 10.000 \times a_{40} = 10.000 \times \dfrac{N_{41}}{D_{40}} = 191.370$

b $K = 10.000 \times \ddot{a}_{40} = 10.000 \times \dfrac{N_{40}}{D_{40}} = 201.370$

Het verschil tussen beide uitkomsten is 10.000, zijnde de eerste uitkering die direct vervalt: $10.000 \times \ddot{a}_x = 10.000 \times (1 + a_x)$

c $K = 10.000 \times {}_{20|}a_{40} = 10.000 \times \dfrac{N_{61}}{D_{40}} = 58.104$

Let er op dat de noemer D_{40} is en niet D_{60}. Let ook op het grote verschil in uitkomst tussen **a** en **c**.

d $K = 10.000 \times {}_{20|}\ddot{a}_{40} = 10.000 \times \dfrac{N_{60}}{D_{40}} = 62.400$

e $K = 10.000 \times A_{40\,\overline{20|}}^{\;\;1} = 10.000 \times \dfrac{D_{60}}{D_{40}} = 4.296$

Het antwoord van **c**, vermeerderd met het antwoord van **e**, is gelijk aan het antwoord van **d**, namelijk de uitkering op het 60ste jaar ontbreekt bij de postnumerando rente, terwijl ze overigens identiek zijn.

f $K = 10.000 \times a_{40\,\overline{20|}} = 10.000 \times \dfrac{N_{41} - N_{61}}{D_{40}} = 133.266$

De uitkomst van **c**, vermeerderd met die van **f**, is gelijk aan de uitkomst van **a**, samen vormen ze immers een dadelijk ingaande levenslange lijfrente.

g $K = 10.000 \times \ddot{a}_{40\,\overline{20|}} = 10.000 \times \dfrac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 138.970$

De uitkomst van **g** en **d** tezamen is gelijk aan de uitkomst van **b**.

Indien voor de vrouw in dit voorbeeld een leeftijdsterugstelling van 6 jaar wordt toegepast, wordt de uitwerking van vraag **a**:

$$K = 10.000 \times a_{34} = 10.000 \times \frac{N_{35}}{D_{34}} = 202.714$$

Deze koopsom is dus duidelijk hoger dan zonder leeftijdsterugstelling.

Verschillende interestvoeten
Indien de werkelijke interestvoet beduidend hoger is dan 4%, zal de animo om verzekeringen tegen 4% af te sluiten, niet groot zijn. Verzekeringsmaatschappijen kunnen als tegemoetkoming kortingen verlenen, maar ook is het gebruikelijk om gedurende een aantal jaren een hogere rekenrente in aanmerking te nemen. De verzekeringsmaatschappij kan immers de ontvangen koopsom ook direct tegen een ho-

gere interestvoet uitlenen, zodat de verzekeringsmaatschappij geen extra interestrisico loopt.

Voorbeeld verschillende interestvoeten

Een man van 25 jaar wil tegen koopsombetaling een uitkering van 10.000 ontvangen als hij 60 jaar wordt. De verzekeringsmaatschappij rekent met 6% rekenrente gedurende de eerste 15 jaar en met 4% daarna.

$$K = 10.000 \times \frac{l_{60}}{l_{25}} \times A_{\overline{15}|6} \times A_{\overline{20}|4}$$

$$K = 10.000 \times \frac{8.496.374}{9.880.454} \times 1{,}06^{-15} \times 1{,}04^{-20} = 1.638$$

Dezelfde gegevens, behalve dat het nu een dadelijk ingaande levenslange postnumerando lijfrente is.

$K = 10.000 \times (a_{40} \times A_{25\,\overline{15}|}^{\;1} + a_{25\,\overline{15}|})$ (eerste symbool tegen 4%, de beide andere symbolen tegen 6%) =

$$K = 10.000 \times \left(\frac{N_{41}}{D_{40}} \times \frac{D_{40}}{D_{25}} + \frac{N_{26} - N_{41}}{D_{25}}\right)$$

$$K = 10.000 \times \left(\frac{356.065}{20.263} \times \frac{9.458{,}1}{23.021} + \frac{351.459 - 129.326}{23.021}\right) = 168.686$$

In woorden: bereken de koopsom voor een dadelijk ingaande postnumerando lijfrente voor een 40-jarige man tegen 4%, maak deze gedurende 15 jaar contant tegen 6% rekening houdende met de sterftekans, en tel daarbij op een dadelijk ingaande tijdelijke postnumerando lijfrente met een duur van 15 jaar voor een 25-jarige man tegen 6%.

Indien uitsluitend 4% in aanmerking was genomen, zou de koopsom $10.000 \times a_{25} = 206.493$ hebben bedragen.

Basisopgaven

1.1 Aan de bevolkingsregistratie van een bepaalde stad wordt ontleend dat per 1 januari van enig jaar het aantal mannen die 30 jaar oud zijn, 15 237 bedraagt. In de loop van dat jaar overlijden 47 mannen uit deze groep. Bepaal de sterftekans.

1.2 Het aantal 75-jarigen uit een overlevingstafel bedraagt 48 979, terwijl

$$q_{74} = 0{,}0601565$$

Bepaal l_{74}.

1.3 Een 35-jarige man wil een verzekering sluiten van 20.000, uit te keren over 25 jaar, mits de verzekerde dan nog in leven is.
Bereken de koopsom.

1.4 Een 30-jarige man wil een verzekering sluiten van 25.000, uit te keren op 65-jarige leeftijd, mits de verzekerde dan nog in leven is.
Bereken de koopsom bij een interestvoet van 5%.

1.5 Een 35-jarige vrouw vraagt een verzekeringsmaatschappij hoe groot de uitkering zal zijn, mits zij na 25 jaar nog leeft, indien zij nu 5.000 stort.
Bereken het gevraagde bedrag.

1.6 Bereken de koopsom van een dadelijk ingaande levenslange lijfrente, groot 7.500 per jaar, afgesloten op het leven van een 30-jarige man, indien de rente:
a prenumerando is;
b postnumerando is.

1.7 Een 30-jarige erft 100.000. Zij/Hij wil daarvoor een dadelijk ingaande levenslange prenumerando lijfrente afsluiten.
a Bereken het bedrag van de rente indien de 30-jarige een vrouw is.
b Bereken het bedrag van de rente indien de 30-jarige een man is.
c Verklaar het verschil tussen beide uitkomsten.

1.8 Bereken de koopsom van een 20 jaar uitgestelde levenslange lijfrente, groot 7.500 per jaar, afgesloten op het leven van een 30-jarige man, indien de lijfrente:
a prenumerando is;
b postnumerando is;
c postnumerando is en er een leeftijdsterugstelling van 5 jaar wordt toegepast.

1.9 Een 30-jarige erft 100.000. Zij/hij wil daarvoor een tijdelijke dadelijk ingaande postnumerando lijfrente afsluiten met een looptijd van 35 jaar.
a Bereken het bedrag van de rente indien de 30-jarige een vrouw is.
b Bereken het bedrag van de rente indien de 30-jarige een man is.
c Verklaar het verschil tussen beide uitkomsten.

1.10 Bereken de koopsom voor een tijdelijke dadelijk ingaande lijfrente, met een duur van 15 jaar, groot 10.000 per jaar, afgesloten op het leven van een 30-jarige man, indien de rente:

a prenumerando is;
b postnumerando is.

1.11 Een 25-jarige erft 120.000. Zij/Hij wil daarvoor een tijdelijke dadelijk ingaande prenumerando lijfrente met een duur van 30 jaar afsluiten. Bereken het bedrag van de rente indien de 25-jarige:

a een vrouw is;
b een man is.

1.12 Een 50-jarige man wil tegen een koopsom van 100.000 over 25 jaar, mits hij in leven is, eenmalig een bedrag ontvangen. Bereken dit bedrag indien de verzekeringsmaatschappij:

a een rekenrente hanteert van 4%;
b een rekenrente hanteert van 4% en een leeftijdsterugstelling van 5 jaar toepast;
c een rekenrente hanteert van 6%;
d een rekenrente hanteert gedurende de eerste 15 jaar van 6% en daarna een rekenrente van 4%.

Voorbeeldopgaven

1.1 Bereken uitsluitend met behulp van de kolom l_x uit de tafel GBM in 4 decimalen nauwkeurig de kans dat:

a een 30-jarige binnen een jaar sterft;
b een 78-jarige over een jaar nog in leven is;
c een 31-jarige sterft als hij 61 jaar oud is;
d een 30-jarige over 30 jaar nog leeft en over 49 jaar is overleden;
e een 32-jarige binnen 45 jaar sterft;
f een pasgeborene niet binnen 30 jaar sterft.

1.2 Van een overlevingstafel, waarin de hoogste leeftijd 104 jaar is, is gegeven:

x	q_x	l_x	d_x
100	0,454	115	
101	0,499		
102	0,564		
103	0,680		
104			

Vul de ontbrekende gegevens aan.

1.3 Op 1 januari 2004 waren bij een pensioenfonds 180 personen van 69 jaar verzekerd die allen een gelijk bedrag aan pensioen ontvingen. In 2004 zijn 6 van deze verzekerden overleden. De berekeningen van dit pensioenfonds zijn gebaseerd op een overlevingstafel waaraan de volgende gegevens kunnen worden ontleend:

x	l_x
68	70 712
69	68 388
70	65 917
71	63 302

a Geef een definitie van het begrip ‘sterftekans’.
b Bereken de sterftekans voor een 69-jarige.
c Zal voornoemd pensioenfonds voor 2004 met betrekking tot de groep 69-jarigen een sterftewinst of een sterfteverlies boeken?
Motiveer uw antwoord.

1.4 a Bereken de koopsom voor een verzekering bij leven van een kapitaal groot 10.000 op het leven van een 40-jarige man, met een duur van 20 jaar.
b Als de leeftijd van de in **a** bedoelde verzekerde dezelfde blijft, maar de duur langer is, zal de koopsom dan groter of kleiner zijn?
Beredeneer uw antwoord.

c Als de duur van de in **a** bedoelde verzekering dezelfde blijft, maar de leeftijd van de verzekerde hoger is, zal de koopsom dan groter of kleiner zijn? Beredeneer uw antwoord.

d Wat wordt het antwoord op vraag **a** indien een leeftijdsterugstelling van 5 jaar wordt toegepast?

1.5 Een 50-jarige man sluit een verzekering voor een prenumerando lijfrente, ingaande op 60-jarige leeftijd, groot 10.000 per jaar. In verband met de ingang van de AOW op 65-jarige leeftijd behoeft de uitkering van dat jaar af slechts 5.000 te belopen.
Bereken de koopsom.

1.6 Een 33-jarige vrouw heeft 100.000 beschikbaar voor de aankoop van een lijfrente. Zij besluit een prenumerando lijfrente te nemen, ingaande op haar 40ste jaar, doch welke op haar 60ste jaar 5 maal zo groot wordt.
Bereken het bedrag van de lijfrente.

1.7 Een 29-jarige vrouw wil tegen koopsombetaling met ingang van haar 60ste jaar een postnumerando lijfrente ontvangen van 30.000. Bereken de koopsom indien de verzekeringsmaatschappij:

a rekent met 4% gedurende de gehele looptijd;

b rekent met 6% gedurende de eerste 15 jaar en daarna met 4%.

1.8 Een vrouw van 35 jaar wil een tijdelijke prenumerando lijfrente ontvangen van 10.000 gedurende 5 jaar en ingaande op het moment dat zij 60 wordt.
Bereken de koopsom.

1.9 Een vrouw van 40 jaar wil voor een koopsom van 50.000 een levenslange postnumerando lijfrente ontvangen vanaf haar 65ste jaar. De verzekeringsmaatschappij rekent met een interestvoet van 6%.
Bereken de hoogte van de lijfrente.

1.10 Een 45-jarige man wint 500.000 in de staatsloterij. Hij wil zich hiervoor van een levenslang inkomen verzekeren. Dit moet de eerste 20 jaar x groot zijn en daarna 10.000 minder.
Bereken x als nog is gegeven dat de uitkeringen prenumerando moeten plaatsvinden.

1.11 Een nu 55-jarige man heeft in het verleden een uitgestelde levenslange postnumerando lijfrente verworven. Deze rente gaat in als hij de 65-jarige leeftijd heeft bereikt; de termijnen bedragen 20.000 per jaar. Hij wil deze rente omzetten in een dadelijk ingaande prenumerando levenslange lijfrente. Hoe groot zullen hiervan de termijnen zijn? Zal de verzekeraar deze wijziging zonder verdere voorwaarden accepteren?

1.12 Een vrouw van 40 jaar wil voor een koopsom van 50.000 een levenslange postnumerando lijfrente ontvangen vanaf haar 65ste jaar. De verzekeringsmaatschappij rekent met een interestvoet van 5% gedurende de eerste 15 jaar, daarna met een interestvoet van 4%.
Bereken de hoogte van de lijfrente.

1.13 Een man van 40 betaalt 100.000 als koopsom voor een dadelijk ingaande levenslange postnumerando lijfrente van 5.000 en voor een eenmalige uitkering als hij 65 wordt.
Bereken die eenmalige uitkering.

1.14 Een 40-jarige man sluit tegen koopsombetaling een verzekering tot uitkering van een kapitaal bij leven na 30 jaar, groot 10.000.
a Bereken deze koopsom met inachtneming van een interestvoet van 4%.
b Bereken deze koopsom op basis van een interestvoet van 6,75%.

1.15 Aan een 3%-commutatietafel worden de volgende gegevens ontleend:

x	D_x	N_x
30	38.919	953.600
35	33.368	770.417
40	28.530	613.514
45	24.281	479.575
50	20.510	365.882
55	17.108	270.265

Bereken:

a l_{30} **b** $\ddot{a}_{35\,\overline{15}|}$ **c** $A_{40\,\overline{15}|}^{\;1}$

Oefenopgaven

1.1 Van een overlevingstafel, waarin de hoogste leeftijd 107 jaar is, is gegeven:

x	q_x	l_x	d_x
103	0,413	180	
104	0,488		
105	0,612		
106	0,723		

a Vul de ontbrekende gegevens in de 4 kolommen in.
b Hoe groot is de overlevingskans van een 103-jarige?

1.2 Een commutatietafel bevat de volgende gegevens:

x	l_x	D_x	N_x
65	76 837	8.212	
66	74 933		
67			74.373
68	70 712		67.101
69	68 388		
70	65 917		53.915

a Bereken de interestvoet die aan deze tafel ten grondslag ligt.
b Bereken l_{67}.
c Bereken N_{69}.
d Bereken, met gebruikmaking van deze tafel, de kans dat een 66-jarige de 68-jarige leeftijd niet bereikt.

1.3 Een man van 40 betaalt 100.000 als koopsom voor een eenmalige uitkering van 100.000 als hij 65 wordt en voor een dadelijk ingaande levenslange postnumerando lijfrente.
Bereken de hoogte van die lijfrente.

1.4 Een 60-jarige man ontvangt uit een nalatenschap 75.994. Hij wil een postnumerando vervallende lijfrente, ingaande op 65-jarige leeftijd.
a Geef een symbool voor de koopsom van de beschreven lijfrente.
b Druk deze koopsom uit in commutatietekens.
c Bereken het bedrag van de lijfrente.

1.5 Een 30-jarige vrouw heeft een grote erfenis ontvangen en wil een gedeelte daarvan besteden aan de koopsommen voor de volgende verzekeringen:

a Een tijdelijke dadelijk ingaande prenumerando lijfrente van 10.000 gedurende 25 jaar.

b Een tijdelijke uitgestelde prenumerando lijfrente van 80.000 ingaande op 55 jaar gedurende 10 jaar.

c Een uitgestelde levenslange prenumerando lijfrente van 30.000 ingaande op 65 jaar.

d Een eenmalige uitkering van 100.000 op 65 jaar mits zij in leven is.

Geef van deze vier verzekeringen de afzonderlijke koopsommen in symbolen, in commutatietekens en in bedragen.
Zouden deze koopsommen hoger of lager zijn indien het een man betrof? Motiveer uw antwoord.

1.6 Een 40-jarige man sluit een verzekering tot uitkering van een bedrag van 10.000 op 50-jarige leeftijd. De nettokoopsom beloopt 5.934.
Bereken de interestvoet welke bij de calculatie van de koopsom is toegepast.

1.7 Een 60-jarige man sluit een verzekering tot uitkering van 100.000 bij leven over 5 jaar. De koopsom bedraagt 71.000; deze is berekend met een interestvoet van 5% en een andere overlevingstafel dan in Appendix 2.
Bereken de kans dat de verzekerde na 5 jaar nog leeft (in 3 decimalen).

1.8 Gegeven: $x > y$ en $n > m$.

Wat is groter: $A_{x\overline{n}|}^{\ \ 1}$ of $A_{y\overline{n}|}^{\ \ 1}$?

en

Wat is groter: $A_{x\overline{n}|}^{\ \ 1}$ of $A_{x\overline{m}|}^{\ \ 1}$?

1.9 Een 40-jarige vrouw betaalt 60.000 als koopsom voor een tijdelijke lijfrente waarvan de eerste termijn vervalt als zij 58 wordt en de laatste als zij 65 wordt.
Geef in symbolen en in commutatietekens de vergelijking waaruit die lijfrente kan worden berekend.

1.10 a Als $x > y$, wat is dan groter, ${}_{n}|\ddot{a}_x$ of ${}_{n}|\ddot{a}_y$?
Motiveer uw antwoord.

b Als $n > m$, wat is dan groter, ${}_{n}|\ddot{a}_x$ of ${}_{m}|\ddot{a}_x$?
Motiveer uw antwoord.

1.11 Een 30-jarige man krijgt de beschikking over een bedrag van 100.000. Daar hij pas over 35 jaar behoefte heeft aan een kapitaal, overweegt hij twee beleggingsvormen:

A Belegging op een spaarrekening, waarop jaarlijks 4% interest wordt bijgeschreven.

B Storting als koopsom voor een verzekering tot uitkering van een kapitaal bij het leven na 35 jaar.

a Bereken het spaarsaldo **A** na 35 jaar.
b Bereken het verzekerde kapitaal **B**.
c Omschrijf wat het quotiënt tussen de uitkomsten van **a** en **b** voorstelt.
d Toon de juistheid van antwoord **c** door middel van een berekening aan.
e Bereken het verzekerde kapitaal **B** indien een leeftijdsterugstelling van 5 jaar wordt toegepast.

1.12 Een 38-jarige man stort een koopsom voor een kapitaaluitkering bij leven na 25 jaar van 50.000. De koopsom wordt berekend met een interestvoet van 5%.
a Bereken de koopsom.
b Bereken de contante waarde van een bedrag van 50.000, onafhankelijk van enig leven vervallend na 25 jaar, interestvoet eveneens 5%.
c Omschrijf de oorzaak van het verschil tussen de antwoorden van **a** en **b**.

1.13 Een 50-jarige man sluit een verzekering voor een dadelijk ingaande levenslange postnumerando lijfrente. De eerste 10 uitkeringen bedragen 20.000. De resterende uitkeringen zijn 30.000. Geef de vergelijking voor de koopsom in symbolen en in commutatietekens.

1.14 Een 30-jarige man sluit tegen koopsombetaling een verzekering af voor een prenumerando lijfrente van 40.000 ingaande op 60-jarige leeftijd. Vanwege de AOW-uitkering zullen de uitkeringen op 65-jarige leeftijd en later worden beperkt tot 28.000.
Geef de vergelijking voor de koopsom in symbolen en in commutatietekens.

1.15 Een 25-jarige man sluit tegen koopsombetaling een verzekering af voor de volgende uitkeringen:
- eenmalig 10.000 over 25 jaar ongeacht of hij al dan niet in leven is;
- eenmalig 20.000 over 35 jaar mits hij in leven is;
- jaarlijks levenslang 8.000, voor het eerst over 35 jaar.

Geef de vergelijking voor de koopsom in symbolen en in commutatietekens.

1.16 Een 50-jarige man wil tegen een koopsombetaling van 150.000 een eenmalige uitkering ontvangen indien hij 70 wordt.
a Bereken die eenmalige uitkering.
b Bereken die eenmalige uitkering indien de verzekeringsmaatschappij gedurende de eerste 15 jaar rekent met een rekenrente van 7% en daarna met 4%.
c Bereken die eenmalige uitkering indien de verzekeringsmaatschappij gedurende de eerste 15 jaar rekent met een rekenrente van 7% en daarna met 4%, en tevens een leeftijdsterugstelling toepast van 5 jaar.